

Author

**Appunti del Corso di**  
**Teoria dei Sistemi**  
*tenuto dal prof. Marco Baglietto*

ℒ<sub>T</sub>ℒ<sub>X</sub>



# Indice

<b>1</b>	<b>Introduzione</b>	<b>1.1</b>
1.1	Sistema	1.1
1.1.1	Amplificatore ideale lineare	1.1
1.2	Sistema dinamico	1.1
1.2.1	Circuito RC	1.1
1.3	Variabili di un sistema	1.2
1.4	Sistemi non lineari	1.3
1.4.1	Massa-molla	1.3
1.4.2	Vasca	1.3
1.5	Linearizzazione	1.4
<b>2</b>	<b>Funzioni generalizzate</b>	<b>2.1</b>
2.1	Gradino	2.1
2.2	Rampa	2.1
2.3	Parabola	2.1
2.4	Polinomio di grado $n$	2.1
2.5	Derivate e integrali delle funzioni generalizzate	2.2
2.6	Impulso	2.2
2.7	Doppietto	2.2
2.8	Riepilogo	2.2
2.9	Trasformazioni delle funzioni	2.3
2.9.1	Traslazione	2.3
2.9.2	Scalamiento	2.3
2.9.3	Simmetrie	2.3
2.10	Rettangolo	2.4
<b>3</b>	<b>Trasformata di Laplace</b>	<b>3.1</b>
3.1	Definizione	3.1
3.2	Proprietá	3.2
3.2.1	Linearitá	3.2
3.2.2	Traslazione in $t$	3.2
3.2.3	Traslazione in $s$	3.2
3.2.4	Derivata in $t$	3.2

3.2.5	Derivata n-esima in $t$ . . . . .	3.3
3.2.6	Integrale in $t$ . . . . .	3.3
3.2.7	Derivata in $s$ . . . . .	3.3
3.3	Trasformate di funzioni notevoli . . . . .	3.3
3.3.1	Impulso . . . . .	3.3
3.3.2	Doppietto . . . . .	3.4
3.3.3	Gradino . . . . .	3.4
3.3.4	Rampa . . . . .	3.4
3.3.5	Esponenziale . . . . .	3.4
3.3.6	Alcune $f$ composte: Polinomio ed Esponenziale . . . . .	3.4
3.3.7	Seno . . . . .	3.5
3.3.8	Coseno . . . . .	3.5
3.3.9	Seno e Coseno (2) . . . . .	3.5
3.3.10	Polinomio e seno . . . . .	3.6
3.3.11	Polinomio e coseno . . . . .	3.6
3.3.12	Esponenziale e seno . . . . .	3.6
3.3.13	Esponenziale e coseno . . . . .	3.6
3.3.14	Polinomio grado 1, esponenziale e seno . . . . .	3.7
3.3.15	Polinomio grado 2, esponenziale e seno . . . . .	3.7
3.3.16	Polinomio grado 1, esponenziale e coseno . . . . .	3.7
3.3.17	Polinomio grado 2, esponenziale e coseno . . . . .	3.7
3.3.18	Prodotto di convoluzione: definizione . . . . .	3.8
3.3.19	Prodotto di convoluzione: trasformata . . . . .	3.8
<b>4</b>	<b>Anti-Trasformata di Laplace</b> . . . . .	<b>4.1</b>
4.1	Definizione . . . . .	4.1
4.2	Esempi introduttivi . . . . .	4.1
4.3	Funzioni razionali . . . . .	4.2
4.3.1	Fattorizzazione di un polinomio . . . . .	4.3
4.4	Funzione razionale strettamente propria . . . . .	4.3
4.5	Generalizzazione dei fratti semplici . . . . .	4.4
4.5.1	Osservazioni . . . . .	4.5
4.6	Funzione razionale non strettamente propria . . . . .	4.6
4.7	Andamento nel tempo dell'antitrasformata . . . . .	4.7
4.8	Teorema del valore iniziale . . . . .	4.8
4.9	Teorema del valore finale . . . . .	4.9
4.10	Esercizi . . . . .	4.9
<b>5</b>	<b>Sistemi lineari</b> . . . . .	<b>5.1</b>
5.1	$\mathcal{L}^{-1}$ applicato a LDE a coefficienti costanti . . . . .	5.1
5.1.1	Funzione di trasferimento . . . . .	5.2
5.1.2	Risposta all'impulso . . . . .	5.2

5.2	Sistemi propri e impropri . . . . .	5.4
5.2.1	Sistema strettamente proprio $m < n$ . . . . .	5.4
5.2.2	Sistema semplicemente proprio $m = n$ . . . . .	5.4
5.2.3	Sistema improprio $m > n$ . . . . .	5.5
5.3	Stabilità dei sistemi realizzabili $m \leq n$ . . . . .	5.6
5.3.1	Stabilità della risposta libera . . . . .	5.6
5.3.2	Stabilità della risposta forzata . . . . .	5.6
5.3.3	Relazioni tra i due tipi di stabilità . . . . .	5.8
5.4	Rappresentazione dei sistemi lineari 1 . . . . .	5.8
5.5	Risposte al gradino di sistemi di ordine 1 e 2 . . . . .	5.9
5.6	Sistemi di ordine 1 . . . . .	5.9
5.6.1	Risposta al gradino . . . . .	5.10
5.7	Sistemi di ordine 2 . . . . .	5.11
5.7.1	Risposta al gradino . . . . .	5.12
<b>6</b>	<b>Algebra dei blocchi</b> . . . . .	<b>6.1</b>
6.1	Connessioni . . . . .	6.1
6.2	Connessioni equivalenti . . . . .	6.1
6.3	Algebra dei blocchi . . . . .	6.2
6.4	Risposta forzata di sistemi interconnessi . . . . .	6.2
6.4.1	Stabilità BIBO . . . . .	6.3
6.5	Interconnessione di sistemi SISO . . . . .	6.4
6.5.1	Serie . . . . .	6.4
6.5.2	Parallelo . . . . .	6.4
6.5.3	Retroazione (feedback) . . . . .	6.4
6.6	Esercizi . . . . .	6.5
<b>7</b>	<b>Equazione di stato</b> . . . . .	<b>7.1</b>
7.1	Equazione di stato . . . . .	7.1
7.2	Soluzione dell'equazione di stato . . . . .	7.2
7.2.1	Come si calcola $e^{At}$ . . . . .	7.2
7.2.2	Polinomio caratteristico . . . . .	7.3
7.2.3	Polinomio minimo . . . . .	7.4
7.3	Trasformata della soluzione dell'equazione di stato . . . . .	7.5
<b>8</b>	<b>Stabilità e punti di equilibrio</b> . . . . .	<b>8.1</b>
8.1	Definizione qualitativa . . . . .	8.1
8.2	Studio della stabilità dei punti di equilibrio per sistemi lineari . . . . .	8.2
8.3	Stabilità di un sistema . . . . .	8.3
8.3.1	Studio della stabilità attraverso $e^{At}$ . . . . .	8.4
8.3.2	Studio della stabilità attraverso $(sI - A)^{-1}$ . . . . .	8.4
8.3.3	Studio della stabilità attraverso il polinomio minimo . . . . .	8.5
8.4	Linearizzazione dei sistemi non lineari . . . . .	8.7

8.4.1	Studio della stabilità dei punti di equilibrio per sistemi non lineari . . . . .	8.9
8.4.2	Modello preda predatore . . . . .	8.9
<b>9</b>	<b>Teoria del controllo</b>	<b>9.1</b>
9.1	Raggiungibilità e controllabilità . . . . .	9.1
9.1.1	Proprietà per i sistemi LTI a tempo continuo . . . . .	9.1
9.1.2	Completa controllabilità . . . . .	9.2
9.1.3	Teorema di Cayley-Hamilton . . . . .	9.3
9.1.4	Teorema di Kalman di raggiungibilità . . . . .	9.4
9.1.5	Corollari del teorema di Kalman . . . . .	9.4
9.1.6	Cambio di base . . . . .	9.5
9.1.7	Nota sul prodotto di matrici . . . . .	9.8
9.1.8	Decomposizione canonica di raggiungibilità . . . . .	9.8
9.1.9	Polinomio caratteristico di controllabilità . . . . .	9.10
9.2	Osservabilità e ricostruibilità . . . . .	9.13
9.2.1	Teorema di Kalman di Osservabilità . . . . .	9.15
9.2.2	Corollari del teorema di Kalman . . . . .	9.15
9.2.3	Decomposizione canonica di osservabilità . . . . .	9.16
9.2.4	Polinomio caratteristico di osservabilità . . . . .	9.16
9.2.5	Studio dell'osservabilità . . . . .	9.17
9.3	Decomposizione completa di Kalman . . . . .	9.19
9.3.1	Polinomio caratteristico . . . . .	9.20
9.3.2	Matrice di trasferimento . . . . .	9.20
9.4	Retroazione algebrica sullo stato . . . . .	9.20
9.4.1	Proprietà . . . . .	9.21
9.4.2	Sistema stabilizzabile . . . . .	9.23
9.4.3	Esercizi . . . . .	9.23
9.5	Retroazione algebrica sull'uscita . . . . .	9.25
9.5.1	Polinomio caratteristico . . . . .	9.27
9.5.2	Stabilità BIBO . . . . .	9.28
9.6	Dualità . . . . .	9.29
<b>10</b>	<b>Rappresentazione dei sistemi lineari</b>	<b>10.1</b>
10.1	Descrizione di un sistema . . . . .	10.1
10.2	Controllabilità/osservabilità e l'equazione differenziale . . . . .	10.1
10.3	Realizzazione . . . . .	10.2
10.4	Realizzazione minima . . . . .	10.3
10.4.1	Forma Compagna Controllabile . . . . .	10.3
10.4.2	Forma Compagna Osservabile . . . . .	10.4
10.4.3	Proprietà di FCC e FCO . . . . .	10.5
10.5	Osservatore asintotico dello stato . . . . .	10.6
10.5.1	Osservatore di Luenberger . . . . .	10.7

10.5.2 Osservatore per controllo . . . . .	10.7
<b>11 Sistemi interconnessi</b>	<b>11.1</b>
11.1 Sistemi e sottosistemi . . . . .	11.1
11.2 Studio delle proprietà strutturali . . . . .	11.1
11.3 Sistemi serie/parallelo . . . . .	11.5
11.3.1 Corollario . . . . .	11.6
11.3.2 Proprietá di controllabilitá e osservabilitá . . . . .	11.6
11.3.3 Cancellazione . . . . .	11.7
11.4 Retroazione . . . . .	11.9
11.5 Effetto cancellazione . . . . .	11.10
11.5.1 Dove "finiscono" gli autovalori "cancellati" . . . . .	11.10
<b>12 Riepilogo</b>	<b>12.1</b>
12.1 Trasformata di Laplace . . . . .	12.1
12.1.1 Proprietá . . . . .	12.1
12.1.2 Trasformate notevoli . . . . .	12.2
12.2 Polinomi caratteristici . . . . .	12.3
12.3 Stabilitá BIBO . . . . .	12.3
12.4 Stabilitá . . . . .	12.3
12.5 Relazioni tra le due stabilitá . . . . .	12.3
12.6 Metodi utili di calcolo matriciale . . . . .	12.4
12.6.1 Inversione di matrici $3 \times 3$ . . . . .	12.4
12.6.2 Inversione di matrici triangolari a blocchi . . . . .	12.4

## Indice degli esercizi

Esercizio 1 <i>Derivata di una funzione definita a tratti</i>	2.4
Esercizio 2 <i>Poli reali multipli, poli complessi semplici</i>	4.9
Esercizio 3 <i>Poli reali multipli, poli complessi semplici</i>	4.11
Esercizio 4 <i>Poli reali semplici, poli complessi multipli</i>	4.12
Esercizio 5 <i>Calcolare tutte le funzioni di trasferimento</i>	6.5
Esercizio 6 <i>Calcolare la funzione di trasferimento</i>	6.7
Esercizio 7 <i>Studiare la controllabilità di due rami RC in parallelo</i>	9.5
Esercizio 8 <i>Studiare la controllabilità di due vasche in parallelo</i>	9.7
Esercizio 9 <i>Calcolo di <math>X_R</math> e decomposizione di raggiungibilità</i>	9.10
Esercizio 10 <i>Calcolare <math>X_R</math> e <math>\varphi_C(s)</math></i>	9.11
Esercizio 11 <i>Calcolare <math>X_R</math> e <math>\varphi_C(s)</math></i>	9.12
Esercizio 12 <i>Calcolare <math>X_R</math> e <math>\varphi_C(s)</math></i>	9.12
Esercizio 13 <i>Calcolare <math>X_{NO}</math></i>	9.15
Esercizio 14 <i>Studiare l'osservabilità di due vasche in parallelo</i>	9.17
Esercizio 15 <i>Studio completo del sistema e stabilizzazione</i>	9.23
Esercizio 16 <i>Retroazione algebrica sull'uscita</i>	9.27
Esercizio 17 <i>Studio retr. alg. sull'uscita con l'algebra dei blocchi</i>	9.28
Esercizio 18 <i>Studio stabilità BIBO dopo retroazione sull'uscita</i>	9.29
Esercizio 19 <i>Calcolare la forma compagna controllabile</i>	10.4
Esercizio 20 <i>Stabilizzazione di un sistema con osservatore</i>	10.7
Esercizio 21 <i>Studiare proprietà di sistemi interconnessi</i>	11.3
Esercizio 22 <i>Studio di un sistema dato in <math>T(s)</math></i>	11.11
Esercizio 23 <i>Studio di un sistema dato in <math>T(s)</math></i>	11.11



# Capitolo 1

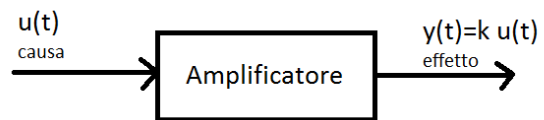
## Introduzione

### 1.1 Sistema

É un oggetto (fisico/astratto) in cui si riescono a individuare diverse quantità che variano nel tempo e tra le quali si può riconoscere una relazione causa-effetto.

#### 1.1.1 Amplificatore ideale lineare

L'amplificatore ideale é un sistema in cui l'uscita (effetto)  $y(t)$  dipende linearmente dall'ingresso (causa)  $u(t)$ .



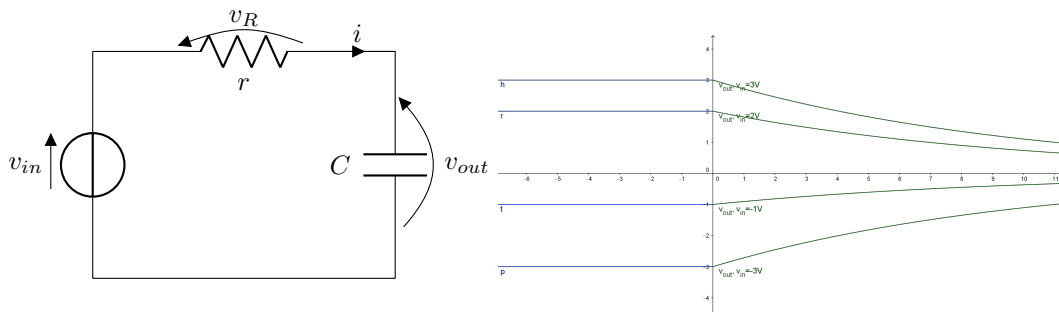
### 1.2 Sistema dinamico

É un sistema i cui effetti non dipendono unicamente dal valore istantaneo delle cause, ma possono dipendere dalla storia delle cause, dallo stato del sistema in un determinato momento, dalle condizioni iniziali.

Il numero di condizioni iniziali determina l'ordine del sistema.

#### 1.2.1 Circuito RC

Consideriamo il circuito RC in figura dove  $v_{in}$  é la causa e  $v_{out}$  é l'effetto.



Supponiamo che:

$$\begin{cases} v_{in} \neq 0 & \text{se } t < 0 \\ v_{in} = 0 & \text{se } t \geq 0 \end{cases}$$

Per  $t < 0$  la tensione sul condensatore é uguale alla tensione applicata dal generatore. Quando per  $t \geq 0$  il generatore viene spento ( $v_{in} = 0$ ), inizia il processo di scarica e la tensione del condensatore

### 1.3. VARIABILI DI UN SISTEMA

tende a zero. Quindi la tensione sul condensatore non dipende istantaneamente dalla tensione applicata dal generatore ( $v_{in}$  per  $t > 0$ ), ma dipende anche dalle condizioni iniziali ( $v_{in}$  per  $t < 0$ ).

Scriviamo le equazioni di questo sistema dinamico:

$$v_R = Ri \quad \Rightarrow \quad i = \frac{v_R}{R} = \frac{v_{in} - v_{out}}{R}, \quad v_{in} = v_R + v_{out}, \quad \dot{v}_{out} = \frac{1}{C}i$$

Mettendo assieme queste equazioni otteniamo:

$$\Rightarrow \quad i = C \cdot \dot{v}_{out} = \frac{v_{in} - v_{out}}{R}$$

La corrente  $i$  è una quantità che evolve nel tempo, ma nell'equazione scompare. Si tratta di una variabile interna che può essere sostituita dalla tensione.

Ridefiniamo alcune variabili:

$$v_{in}(t) \triangleq u(t) \quad v_{out}(t) \triangleq y(t)$$

Il sistema può essere descritto con:

- un'equazione differenziale lineare a coefficienti costanti:

$$RC\dot{y}(t) = u(t) - y(t) \quad \Rightarrow \quad \dot{y}(t) + \frac{1}{RC}y = \frac{1}{RC}u$$

$R$  e  $C$  sono due parametri che però sono sempre uniti nell'equazione del sistema. Infatti  $RC$  è la costante di tempo  $\tau$ .

- la funzione di trasferimento:

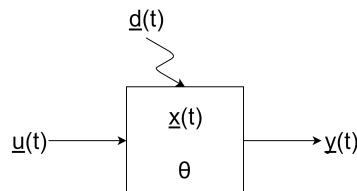
$$T(s) = \frac{\frac{1}{RC}}{s + \frac{1}{RC}} = \frac{\frac{1}{\tau}}{s + \frac{1}{\tau}} = \frac{1}{1 + s\tau}$$

- equazione di stato:

$$\begin{cases} x(t) \triangleq y(t) \\ \dot{x}(t) = -\frac{1}{RC}x(t) + \frac{1}{RC}u(t) \end{cases}$$

$x(t)$  è la variabile di stato e in questo caso coincide con l'uscita del sistema.

### 1.3 Variabili di un sistema

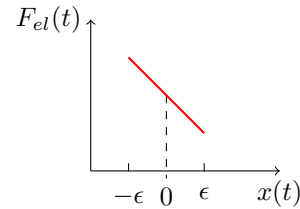
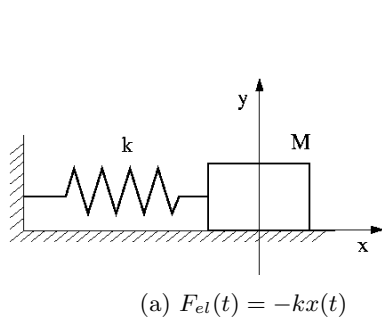


- ingressi regolabili  $\underline{u}(t)$
- ingressi non regolabili o disturbi  $\underline{d}(t)$
- parametri  $\theta$ : non impongono cambiamenti al sistema ma ne modificano la configurazione.
- variabili interne o variabili di stato  $\underline{x}(t)$ : sono variabili che vengono descritte dall'evoluzione del sistema secondo leggi definite.
- uscite  $\underline{y}(t)$

## 1.4 Sistemi non lineari

Finora abbiamo studiato esempi di sistemi lineari descritti da equazioni lineari. Nel mondo fisico però praticamente tutti i sistemi sono non lineari.

### 1.4.1 Massa-molla

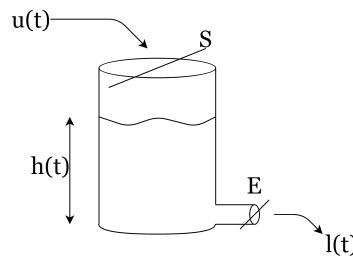


(b) Il sistema lineare descrive il modello fisico reale  $F_{el}(t) = -kx(t)$  solo per un intorno del punto di equilibrio

È un modello che descrive la forza elastica, ma non completamente. Infatti la molla ha una struttura fisica: anche se applichiamo una forza sempre maggiore, la molla raggiunge la sua lunghezza minima (completamente compressa). Quindi la forza elastica diventa una forza vincolare. Questo modello matematico non considera i casi limite nei quali si perde la linearità.

Quindi i modelli matematici che descrivono le leggi fisiche attraverso i sistemi lineari sono solo approssimazioni per "piccole variazioni".

### 1.4.2 Vasca



{	$h(t)$	altezza colonna di $H_2O$ ( $h(t) > 0$ )
	$u(t)$	portata in ingresso
	$l(t)$	portata in uscita
	$E$	sezione foro uscita della vasca
	$S$	sezione della vasca (costante su tutta l'altezza)

$u(t)$  è l'ingresso che possiamo controllare attraverso un rubinetto.

$l(t)$  e  $h(t)$  sono entrambe possibili uscite, ma scegliamo  $y(t) \equiv h(t)$  perché è misurabile più facilmente (non è detto che le uscite siano sempre misurabili).

Modelliamo il sistema:

$$Sh'(t) = u(t) - l(t) \quad (1.1)$$

dove  $Sh'(t)$  rappresenta la variazione di volume rispetto al tempo.

Ricaviamo  $l(t)$  perché è incognito: consideriamo una particella d'acqua che scende dalla cima della vasca fino all'uscita inferiore e calcoliamone il bilancio energetico.

$$\cancel{m}gh = \frac{1}{2} \cancel{m}v^2 \rightarrow gh = \frac{1}{2}v^2 \rightarrow v(t) = \sqrt{2gh(t)} \rightarrow l(t) = E\sqrt{2gh(t)} \rightarrow Sh'(t) = u(t) - E\sqrt{2gh(t)}$$

$$h'(t) = -\frac{E}{S}\sqrt{2g}\sqrt{h(t)} + \frac{1}{S}u(t) \quad (1.2)$$

Poiché la derivata dell'uscita non é una combinazione lineare degli ingressi, questa é un'equazione differenziale non lineare.

Inoltre esistono dei vincoli fisici che in questa equazione non vengono considerati: 
$$\begin{cases} 0 \leq h(t) \leq h_{max} \\ 0 \leq u(t) \leq u_{max} \end{cases}$$

Infatti anche se  $h(t)$  diventa maggiore dell'altezza massima della vasca, cioè l'acqua comincia a fuoriuscire, l'equazione del modello dice che la variazione di altezza cresce (se supponiamo positivo il secondo membro di 1.2), mentre in realtà si dovrebbe annullare.

## 1.5 Linearizzazione

Consideriamo il sistema della vasca nel paragrafo precedente: fissiamo un'altezza  $\bar{h}$  e supponiamo che  $u(t) \equiv \bar{u} = E\sqrt{2g\bar{h}}$ . Ne segue che  $\dot{h}(\bar{t}) = 0$ . Questa situazione é detta condizione di equilibrio e  $(\bar{h}, \bar{u})$  é il punto di equilibrio.

Nei passaggi successivi riscriveremo l'equazione 1.2:  $\dot{h}(t) = f(h(t), u(t))$

Calcoliamo l'approssimazione di Taylor fino al primo ordine intorno a  $(\bar{h}, \bar{u})$ :

$$f(h(t), u(t)) = f(\bar{h}, \bar{u}) + \left. \frac{\partial f(h, u)}{\partial h} \right|_{(\bar{h}, \bar{u})} \cdot (h(t) - \bar{h}) + \left. \frac{\partial f(h, u)}{\partial u} \right|_{(\bar{h}, \bar{u})} \cdot (u(t) - \bar{u}) + \text{Resto}$$

poiché  $f(\bar{h}, \bar{u}) = 0$ :

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial f(h, u)}{\partial h} \right|_{(\bar{h}, \bar{u})} &= -\frac{E}{S} \sqrt{2g} \frac{1}{2\sqrt{\bar{h}}} \Big|_{(\bar{h}, \bar{u})} = -\frac{E}{2S} \sqrt{\frac{2g}{\bar{h}}} \triangleq -\alpha \quad (\alpha > 0) \\ \left. \frac{\partial f(h, u)}{\partial u} \right|_{(\bar{h}, \bar{u})} &= \frac{1}{S} \triangleq \beta \quad (\beta > 0) \end{aligned}$$

Definiamo:

$$\begin{aligned} \delta h(t) &\triangleq h(t) - \bar{h} \quad \text{la variazione di } h \text{ rispetto al punto di equilibrio } \bar{h} \\ \delta u(t) &\triangleq u(t) - \bar{u} \quad \text{la variazione di } u \text{ rispetto al punto di equilibrio } \bar{u} \end{aligned}$$

se  $u(t)$  é vicino a  $\bar{u}$ , allora  $\delta u(t)$  può essere negativo, purché  $u(t) > 0$  ( $u(t)$  introduce acqua nella vasca, ma non la può aspirare). Analogamente vale per  $h(t)$ .

Calcoliamo la derivata assoluta rispetto al tempo della variazione di altezza:

$$\delta \dot{h}(t) = \frac{d}{dt}(h(t) - \bar{h}) = \frac{d}{dt}h(t) \triangleq \dot{h}(t)$$

abbiamo trovato che la derivata di  $h(t)$  e  $\delta h(t)$  sono uguali per piccole variazioni.

Quindi in conclusione si ottiene:

$$\delta \dot{h}(t) = -\alpha \cdot \delta h(t) + \beta \cdot \delta u(t)$$

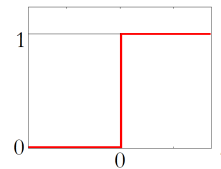
É sensato modellare la vasca come un sistema lineare, ma solo se stiamo lavorando con piccole variazioni rispetto ad un punto di equilibrio.

# Capitolo 2

## Funzioni generalizzate

### 2.1 Gradino

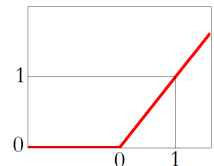
$$\mathbf{1}(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 1 & t \geq 0 \end{cases}$$



Presenta una discontinuità in  $t = 0$ .

### 2.2 Rampa

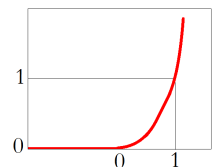
$$\text{ram}(t) = t \cdot \mathbf{1}(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ t & t \geq 0 \end{cases}$$



In  $t = 0$  è continua, ma presenta una discontinuità di prima specie nella derivata.

### 2.3 Parabola

$$\text{par}(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ \frac{t^2}{2} & t \geq 0 \end{cases}$$



Risulta continua e con derivata continua anche in  $t = 0$ .

### 2.4 Polinomio di grado n

$$\text{pol}(t) = \frac{t^n}{n} \cdot \mathbf{1}(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ \frac{t^n}{n} & t \geq 0 \end{cases}$$

## 2.5 Derivate e integrali delle funzioni generalizzate

$$\begin{aligned} ram(t) &= \int_{-\infty}^t \mathbf{1}(\tau) d\tau & \frac{d}{dt} ram(t) &= \mathbf{1}(t) \\ par(t) &= \int_{-\infty}^t ram(\tau) d\tau & \frac{d}{dt} par(t) &= ram(t) \end{aligned}$$

## 2.6 Impulso

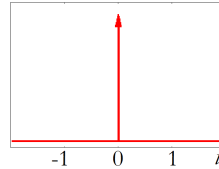
Introduco la funzione  $\mathbf{1}_\Delta(t)$  definita come:

$$\int_{-\infty}^t \frac{d}{dt} \mathbf{1}_\Delta(t) d\tau = \begin{cases} 1 & t > \Delta \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$

Non consideriamo il caso in cui  $0 < t < \Delta$ .

Definisco  $\delta(t)$  la funzione  $\frac{d}{dt} \mathbf{1}_\Delta(t)$  quando  $\Delta \rightarrow 0$ . Valgono dunque le seguenti relazioni:

$$\int_{-t}^t \delta(\tau) d\tau = 1 \quad \forall t > 0, \quad \frac{d}{dt} \mathbf{1}(t) = \delta(t)$$



L'impulso é caratterizzato dal valore della sua area, determinato dal coefficiente della funzione.

L'impulso torna utile quando bisogna effettuare il **campionamento** di una funzione, cioè determinare il valore della funzione nel punto in cui viene applicato l'impulso.

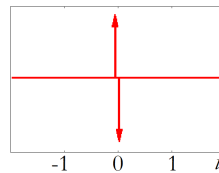
$$\begin{aligned} f(t) \delta(t) &= f(0) \delta(t) \\ f(t) \delta(t - T) &= f(T) \delta(t - T) \end{aligned}$$

## 2.7 Doppietto

Derivando ulteriormente  $\frac{d}{dt} \mathbf{1}_\Delta(t)$  in un intorno  $I(0)$  e in  $I(\Delta)$  si ottengono due impulsi unitari: il primo centrato nell'origine, mentre il secondo centrato in  $\Delta$  e negativo.

Per  $\Delta \rightarrow 0$  si ottiene:

$$\frac{d}{dt} \delta(t) = \dot{\delta}(t)$$



## 2.8 Riepilogo

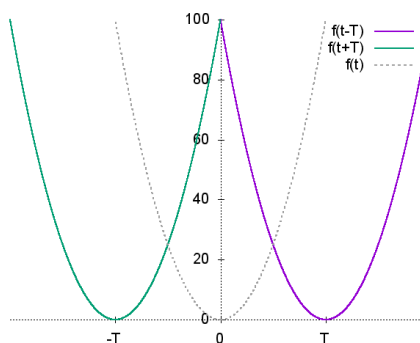
$$par(t) \xrightarrow{\frac{d}{dt}} ram(t) \xrightarrow{\frac{d}{dt}} \mathbf{1}(t) \xrightarrow{\frac{d}{dt}} \delta(t) \xrightarrow{\frac{d}{dt}} \dot{\delta}(t)$$

## 2.9 Trasformazioni delle funzioni

### 2.9.1 Traslazione

$$f(t) = f(t - T)$$

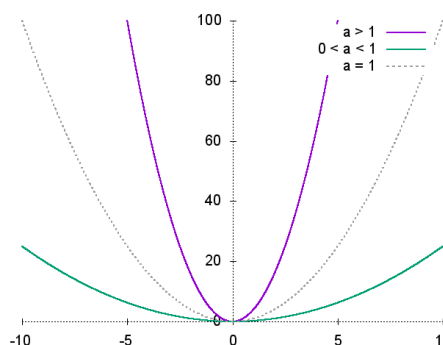
- $T > 0$ : ritardo, la funzione é tralata verso dx di t
- $T < 0$ : anticipo, la funzione é tralata verso sx di t



### 2.9.2 Scalamento

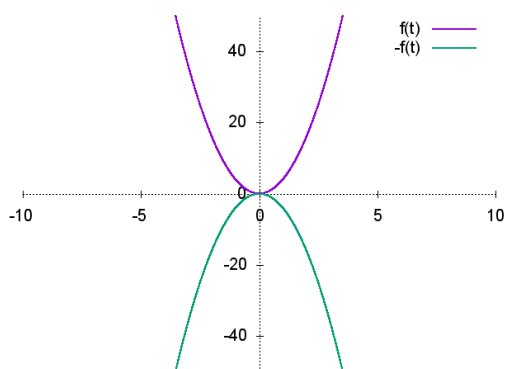
$$f(t) = f(t \cdot \alpha)$$

- $0 < \alpha < 1$ : la funzione si estende di un fattore t
- $\alpha > 1$ : la funzione viene compressa di un fattore t

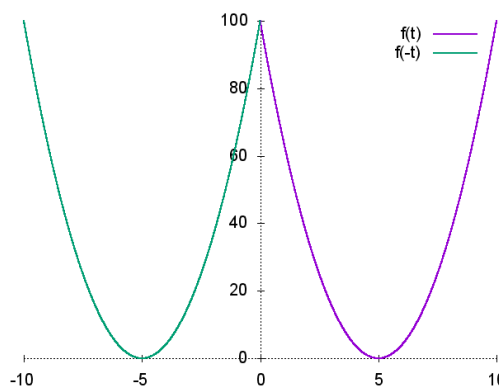


### 2.9.3 Simmetrie

- $f(t) = f(-t)$ : simmetrica rispetto l'asse delle y
- $f(t) = -f(t)$ : simmetrica rispetto l'asse delle x



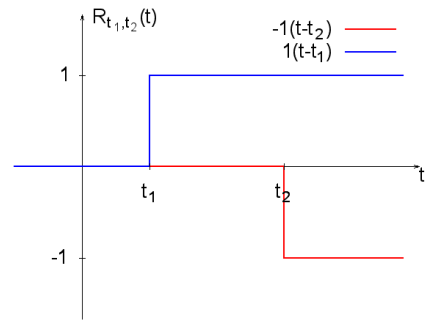
(a) simmetria rispetto l'asse x



(b) simmetria rispetto l'asse y

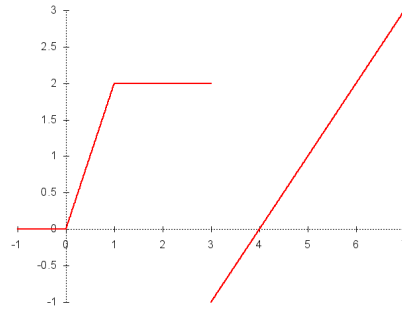
## 2.10 Rettangolo

$$R_{t_1, t_2}(t) = \mathbf{1}(t - t_1) - \mathbf{1}(t - t_2)$$



## \*\*\* Esercizio 1 Derivata di una funzione definita a tratti

Dividiamo il grafico 2.10 in sezioni e per ognuna scriviamo la funzione *finestrata* (cioè moltiplicata per un rettangolo di base pari alla larghezza della sezione):

Figura 2.10: Grafico di  $f(t)$ 

$$f(t) = 2t \cdot R_{0,1}(t) + 2 \cdot R_{1,3}(t) + (t-4) \cdot R_{3,\infty}(t)$$

Riscriviamo i rettangoli attraverso i gradini:

$$\begin{aligned} f(t) &= 2t \cdot [\mathbf{1}(t-0) - \mathbf{1}(t-1)] + 2 [\mathbf{1}(t-1) - \mathbf{1}(t-3)] + (t-4) [\mathbf{1}(t-3) - \underbrace{\mathbf{1}(t-\infty)}_0] = \\ &= 2t \cdot \mathbf{1}(t) + (-2t+2) \cdot \mathbf{1}(t-1) + (-2+t-4) \cdot \mathbf{1}(t-3) = \\ &= 2t \cdot \mathbf{1}(t) - 2(t-1) \cdot \mathbf{1}(t-1) + (t-6) \cdot \mathbf{1}(t-3) \end{aligned}$$

Quindi si può continuare in due modi equivalenti:

1. si riconducono le funzioni a funzioni generalizzate e si deriva:

$$\text{se sostituiamo: } (t-6) \cdot \mathbf{1}(t-3) = (t-3) \cdot \mathbf{1}(t-3) - 3 \cdot \mathbf{1}(t-3) = \text{ram}(t-3) - 3 \cdot \mathbf{1}(t-3)$$

$$\begin{aligned} f(t) &= 2 \cdot \text{ram}(t) & - 2 \cdot \text{ram}(t-1) & + \text{ram}(t-3) & - 3 \cdot \mathbf{1}(t-3) \\ f'(t) &= 2 \cdot \mathbf{1}(t) & - 2 \cdot \mathbf{1}(t-1) & + \mathbf{1}(t-3) & - 3 \cdot \delta(t-3) \end{aligned} \quad (2.1)$$

2. si usano le derivate del prodotto:

$$f'(t) = [2 \cdot \mathbf{1}(t) + 2t \cdot \delta(t)] - 2 \cdot \mathbf{1}(t-1) - 2 \cdot (t-1) \cdot \delta(t-1) + \mathbf{1}(t-3) + (t-6) \cdot \delta(t-3)$$

Attraverso il campionamento si ha che:



## 2.10. RETTANGOLO

- $t \cdot \delta(t) = 0$ : campionamento in zero della retta passante per l'origine
- $(t - 1) \cdot \delta(t - 1) = 0$ : analogo al punto precedente
- $(t - 6) \cdot \delta(t - 3) = -3 \cdot \delta(t - 3)$ : la retta  $y = t - 6$  calcolata in  $t = 3$  vale -3.

Dopo queste semplificazioni si ottiene l'espressione [2.1](#).

# Capitolo 3

## Trasformata di Laplace

### 3.1 Definizione

Operazione che consente di associare in modo biunivoco ad una funzione  $f(t) : [0^-, +\infty]$  un'altra funzione  $F(s)$  a valori complessi  $s = \sigma + j\omega$   $\sigma = \Re(s), \omega = \Im(s)$ .

Se l'integrale  $\int_{0^-}^{+\infty} f(t)e^{-st} dt$  esiste (calcolabile finito), allora  $f(t)$  é Laplace-trasformabile:

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s) = \int_{0^-}^{+\infty} f(t)e^{-st} dt$$

**Definizione 1.** Si definisce **ascissa di convergenza** per la trasformata di Laplace di una funzione  $f(t)$  la quantità:

$$\bar{\sigma} \in \mathbb{R} \quad \bar{\sigma} = \inf \{\Re(s) : \exists F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}\}$$

In parole povere si prendono tutti i numeri complessi per cui esiste la trasformata di Laplace. Quindi  $\bar{\sigma}$  é l'estremo inferiore di questo insieme (non é detto che sia anche il minimo).

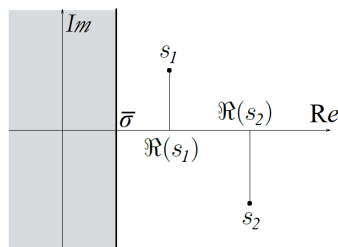


Figura 3.1: Nel semipiano grigio la trasformata non esiste

**Teorema 1** Se la trasformata di Laplace esiste per qualche  $s = \bar{s}$ , allora essa esiste anche  $\forall s$  tale che  $\Re(s) > \Re(\bar{s})$ .

In pratica l'ascissa di convergenza definisce il limite a destra del quale la trasformata esiste sempre.

**Teorema 2** La trasformata di Laplace é **analitica**  $\forall s$  tale che  $\Re(s) > \bar{\sigma}$ . Analitica significa che é continua e derivabile  $\infty$  volte.

In pratica, se una  $f$  non é continua né derivabile in nessun punto, la sua trasformata lo é comunque: é piú facile lavorare con quest'ultima.

## 3.2 Proprietà

### 3.2.1 Linearità

$$\begin{aligned} f_1(t) &\xrightarrow{\mathcal{L}} F_1(s) & f_2(t) &\xrightarrow{\mathcal{L}} F_2(s) \\ \Rightarrow f(t) = \alpha f_1(t) + \beta f_2(t) &\xrightarrow{\mathcal{L}} F(s) = \alpha F_1(s) + \beta F_2(s) \end{aligned}$$

**Dimostrazione**

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{f(t)\} = F(s) &= \int_{0^-}^{+\infty} (\alpha f_1(t) + \beta f_2(t)) e^{-st} dt = \\ &= \alpha \int_{0^-}^{+\infty} f_1(t) e^{-st} dt + \beta \int_{0^-}^{+\infty} f_2(t) e^{-st} dt = \alpha F_1(s) + \beta F_2(s) \end{aligned}$$

### 3.2.2 Traslazione in t

$$f(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} F(s) \Rightarrow f(t-T) \cdot \mathbf{1}(t-T) \xrightarrow{\mathcal{L}} e^{-sT} F(s)$$

**Dimostrazione** chiamiamo  $\bar{f}(t) = f(t-T) \cdot \mathbf{1}(t-T)$  (con il gradino non consideriamo tutto ciò che accade prima di  $T$ , altrimenti la trasformata sarebbe stata diversa e avrebbe incluso anche il tratto  $(-\infty, T)$ ).

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{\bar{f}(t)\} &= \int_{0^-}^{+\infty} \bar{f}(t) e^{-st} dt = \int_{0^-}^{T^-} \bar{f}(t) e^{-st} dt + \int_{T^-}^{+\infty} \bar{f}(t) e^{-st} dt = \\ &= 0 + \int_{T^-}^{+\infty} f(t-T) \cdot 1 \cdot e^{-st} dt = && \text{il gradino vale 1 in } (T^-, +\infty) \\ &= \int_{0^-}^{+\infty} f(\tau) e^{-s(\tau+T)} d\tau = && \text{cambiamento di variabile } \tau = t - T \\ &= e^{-sT} \int_{0^-}^{+\infty} f(\tau) e^{-s\tau} d\tau = e^{-sT} F(s) \end{aligned}$$

### 3.2.3 Traslazione in s

$$f(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} F(s) \Rightarrow e^{at} f(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} F(s-a)$$

**Dimostrazione** chiamo  $\tilde{f}(t) = e^{at} f(t)$ :

$$\mathcal{L}\{\tilde{f}(t)\} = \int_{0^-}^{+\infty} \tilde{f}(t) e^{-st} dt = \int_{0^-}^{+\infty} e^{at} f(t) e^{-st} dt = \int_{0^-}^{+\infty} f(t) e^{-(s-a)t} dt = F(s-a)$$

### 3.2.4 Derivata in t

$$f(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} F(s) \Rightarrow \dot{f}(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} sF(s) - f(0^-)$$

**Dimostrazione**

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{\dot{f}(t)\} &= \int_{0^-}^{+\infty} \dot{f}(t) e^{-st} dt \rightarrow \text{Integro per parti} \rightarrow \left( \int \dot{f}(x) g(x) dx = f(x)g(x) - \int f(x) \dot{g}(x) dx \right) \\ &= [f(t) e^{-st}]_{0^-}^{+\infty} - \int_{0^-}^{+\infty} f(t) \cdot (-s) \cdot e^{-st} dt = \\ &= 0 - f(0^-) + s \int_{0^-}^{+\infty} f(t) e^{-st} dt = sF(s) - f(0^-) \end{aligned}$$

### 3.2.5 Derivata n-esima in t

- $n = 1$

$$g(t) = \dot{f}(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} G(s) = sF(s) - f(0^-)$$

- $n = 2$

$$\dot{g}(t) = \ddot{f}(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} s \cdot G(s) - g(0^-) =$$

per la proprietà di [derivata in t](#):

$$= s \cdot [sF(s) - f(0^-)] - \dot{f}(0^-)$$

$$\Rightarrow \ddot{f}(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} s^2 F(s) - sf(0^-) - \dot{f}(0^-)$$

- $n = 3$

$$\frac{d^3}{dt^3} f(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} s^3 F(s) - s^2 f(0^-) - sf^{(1)}(0^-) - f^{(2)}(0^-)$$

- $n$

$$\frac{d^n}{dt^n} f(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} s^n F(s) - s^{n-1} f(0^-) - s^{n-2} f^{(1)}(0^-) - \dots - sf^{(n-2)}(0^-) - f^{(n-1)}(0^-) =$$

$$= s^n F(s) - \sum_{k=1}^n s^{n-k} f^{(k-1)}(0^-)$$

### 3.2.6 Integrale in t

$$\int_{0^-}^t f(\tau) d\tau \xrightarrow{\mathcal{L}} \frac{1}{s} F(s)$$

**Dimostrazione**

$$g(t) = \int_{0^-}^t f(\tau) d\tau, \quad \dot{g}(t) = f(t), \quad g(0) = 0$$

Per la proprietà di [derivata in t](#):

$$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\} = \mathcal{L}\{\dot{g}(t)\} = s \cdot \mathcal{L}\{g(t)\} - g(0^-) = s \cdot G(s) - 0 \Rightarrow G(s) = \frac{1}{s} F(s)$$

### 3.2.7 Derivata in s

$$t \cdot f(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} -\frac{d}{ds} F(s)$$

$$t^n \cdot f(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} (-1)^n \frac{d^n}{ds^n} F(s)$$

**Dimostrazione**  $n = 1$  dalla [definizione](#) di trasformata di Laplace:

$$\frac{d}{ds} F(s) = \frac{d}{ds} \int_{0^-}^{+\infty} f(t) e^{-st} dt =$$

Uso la regola di derivazione sotto segno di integrale:

$$= \int_{0^-}^{+\infty} f(t) \cdot \frac{\partial}{\partial s} e^{-st} dt = \int_{0^-}^{+\infty} f(t) \cdot (-t) \cdot e^{-st} dt = - \int_{0^-}^{+\infty} t \cdot f(t) \cdot e^{-st} dt = \mathcal{L}\{t \cdot f(t)\}$$

## 3.3 Trasformate di funzioni notevoli

### 3.3.1 Impulso

Dalla [definizione](#) di trasformata di Laplace:

$$\mathcal{L}\{\delta(t)\} = \int_{0^-}^{+\infty} \delta(t) e^{-st} dt = \int_{0^-}^{+\infty} \delta(t) \cdot 1 dt = 1$$

### 3.3.2 Doppietto

Per la proprietà di [derivata in t](#):

$$\begin{aligned}\dot{\delta}(t) &\xrightarrow{\mathcal{L}} s \cdot \mathcal{L}\{\delta(t)\} - \delta(0^-) = s \\ \delta^{(n)}(t) &\xrightarrow{\mathcal{L}} s^n \quad \text{se tutte le condizioni iniziali sono nulle}\end{aligned}$$

### 3.3.3 Gradino

Calcoliamolo in due metodi differenti:

1. Utilizziamo la [definizione](#) di trasformata di Laplace:

$$\int_{0^-}^{+\infty} \mathbf{1}(t)e^{-st} dt = \int_{0^-}^{+\infty} e^{-st} dt = -\frac{1}{s} [e^{-st}]_{0^-}^{+\infty} = -\frac{1}{s}(-1) = \frac{1}{s}$$

2. È l'integrale del gradino, quindi possiamo utilizzare la proprietà di [integrazione in t](#):

$$\begin{aligned}\mathbf{1}(t) &= \int_{0^-}^t \delta(\tau) d\tau \\ \Rightarrow \mathbf{1}(t) &\xrightarrow{\mathcal{L}} \frac{1}{s} \mathcal{L}\{\delta(t)\} = \frac{1}{s}\end{aligned}$$

### 3.3.4 Rampa

È l'integrale del gradino, quindi utilizziamo la proprietà di [integrazione in t](#):

$$t \cdot \mathbf{1}(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} \frac{1}{s} \cdot \mathcal{L}\{\mathbf{1}(t)\} = \frac{1}{s^2}$$

Generalizziamo per il grado n:

$$t^n \cdot \mathbf{1}(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} \frac{n!}{s^{n+1}}$$

### 3.3.5 Esponenziale

$$e^{\sigma t} \cdot \mathbf{1}(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} \frac{1}{s - \sigma}$$

### 3.3.6 Alcune f composte: Polinomio ed Esponenziale

- $n = 1$ : chiamo  $t \cdot e^{\sigma t} \cdot \mathbf{1}(t) = t \cdot f(t)$

Per la proprietà di [derivazione in s](#):

$$\begin{aligned}t \cdot f(t) &\xrightarrow{\mathcal{L}} (-1) \frac{d}{ds} F(s) \\ \Rightarrow f(t) = e^{\sigma t} \cdot \mathbf{1}(t) &\xrightarrow{\mathcal{L}} F(s) = \frac{1}{s - \sigma} \\ \Rightarrow t \cdot e^{\sigma t} \cdot \mathbf{1}(t) &\xrightarrow{\mathcal{L}} (-1) \frac{d}{ds} \frac{1}{s - \sigma} = (-1) \frac{-1}{(s - \sigma)^2} = \frac{1}{(s - \sigma)^2}\end{aligned}$$

- $n$ : chiamo  $f(t) = t^n \cdot \mathbf{1}(t)$   
per la presenza dell'esponenziale sto effettuando una [traslazione in s](#):

$$e^{\sigma t} f(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} F(s - \sigma) = \frac{n!}{(s - \sigma)^{n+1}}$$

### 3.3.7 Seno

Scriviamo il seno attraverso la rappresentazione di Eulero dei numeri complessi:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}\{\sin(\omega t)\mathbf{1}(t)\} &= \mathcal{L}\left\{\frac{e^{j\omega t} - e^{-j\omega t}}{2j}\mathbf{1}(t)\right\} = \\
 &= \frac{1}{2j} [\mathcal{L}\{e^{j\omega t}\mathbf{1}(t)\} - \mathcal{L}\{e^{-j\omega t}\mathbf{1}(t)\}] = && \text{per linearit\`a} \\
 &= \frac{1}{2j} \left[ \frac{1}{s - j\omega} - \frac{1}{s - (-j\omega)} \right] = && \text{traslazione in } s \\
 &= \frac{1}{2j} \frac{s + j\omega - s + j\omega}{s^2 + \omega^2} = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}
 \end{aligned}$$

### 3.3.8 Coseno

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}\{\cos(\omega t)\mathbf{1}(t)\} &= \mathcal{L}\left\{\frac{e^{j\omega t} + e^{-j\omega t}}{2}\mathbf{1}(t)\right\} = \\
 &= \frac{1}{2} [\mathcal{L}\{e^{j\omega t}\mathbf{1}(t)\} + \mathcal{L}\{e^{-j\omega t}\mathbf{1}(t)\}] = \\
 &= \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{s + j\omega} + \frac{1}{s - j\omega} \right] = \\
 &= \frac{1}{2} \left[ \frac{s - j\omega + s + j\omega}{s^2 + \omega^2} \right] = \frac{s}{s^2 + \omega^2}
 \end{aligned}$$

### 3.3.9 Seno e Coseno (2)

Gli stessi risultati possono essere ottenuti sfruttando la propriet\`a di [derivazione in t](#).

Ad esempio partiamo dal seno:

$$\sin(\omega t) \xrightarrow{\frac{d}{dt}} \omega \cos(\omega t) \xrightarrow{\frac{d}{dt}} -\omega^2 \sin(\omega t)$$

Conosciamo la trasformata della funzione seno:

$$\mathcal{L}\{\sin(\omega t)\} = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$$

Calcoliamo la trasformata della sua derivata:

$$\begin{aligned}
 \omega \cos(\omega t) &= \frac{d}{dt} \sin(\omega t) \quad \Rightarrow \quad \mathcal{L}\{\omega \cos(\omega t)\} = \mathcal{L}\left\{\frac{d}{dt} \sin(\omega t)\right\} \\
 \mathcal{L}\left\{\frac{d}{dt} \sin(\omega t)\right\} &= s \frac{\omega}{s^2 + \omega^2} - \sin(\omega \cdot 0^-) = \frac{s\omega}{s^2 + \omega^2}
 \end{aligned}$$

Poich\`e la trasformata di Laplace \`e lineare (3.2.1) otteniamo la stessa trasformata del coseno calcolata in precedenza.

$$\Rightarrow \frac{1}{\omega} \cdot \mathcal{L}\{\omega \cos(\omega t)\} = \frac{s\omega}{s^2 + \omega^2} \cdot \frac{1}{\omega} = \frac{s}{s^2 + \omega^2}$$

Calcoliamo la trasformata della derivata seconda del seno:

$$\begin{aligned}
 -\omega^2 \sin(\omega t) &= \frac{d}{dt} \omega \cos(\omega t) \quad \Rightarrow \quad \mathcal{L}\{-\omega^2 \sin(\omega t)\} = \mathcal{L}\left\{\frac{d}{dt} \omega \cos(\omega t)\right\} \\
 \mathcal{L}\left\{\frac{d}{dt} \omega \cos(\omega t)\right\} &= s \frac{s\omega}{s^2 + \omega^2} - \omega \cos(\omega \cdot 0^-) = \frac{s^2\omega}{s^2 + \omega^2} - \omega = \frac{-\omega^3}{s^2 + \omega^2} \\
 \Rightarrow \left(-\frac{1}{\omega^2}\right) \cdot \mathcal{L}\{-\omega^2 \sin(\omega t)\} &= \left[\frac{-\omega^3}{s^2 + \omega^2}\right] \cdot \left(-\frac{1}{\omega^2}\right) = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}
 \end{aligned}$$

Analogamente partendo dal coseno:

$$\cos(wt) \xrightarrow{\frac{d}{dt}} -w \sin(wt) \xrightarrow{\frac{d}{dt}} -w^2 \cos(wt)$$

Calcoliamo la trasformata della sua derivata:

$$\begin{aligned} -w \sin(wt) = \frac{d}{dt} \cos(wt) &\Rightarrow \mathcal{L}\{-w \sin(wt)\} = \mathcal{L}\left\{\frac{d}{dt} \cos(wt)\right\} \\ \mathcal{L}\left\{\frac{d}{dt} \cos(wt)\right\} &= s \frac{s}{s^2 + w^2} - \cos(w \cdot 0^-) = \frac{s^2}{s^2 + w^2} - 1 \\ \Rightarrow -\frac{1}{w} \cdot \mathcal{L}\{-w \sin(wt)\} &= \left[\frac{s^2}{s^2 + w^2} - 1\right] \cdot \left(-\frac{1}{w}\right) = \left[\frac{s^2 - s^2 - w^2}{s^2 + w^2}\right] \cdot \left(-\frac{1}{w}\right) = \frac{w}{s^2 + w^2} \end{aligned}$$

Calcoliamo la trasformata della derivata seconda del coseno:

$$\begin{aligned} -w^2 \cos(wt) = \frac{d}{dt} [-w \sin(wt)] &\Rightarrow \mathcal{L}\{-w^2 \cos(wt)\} = \mathcal{L}\left\{\frac{d}{dt} [-w \sin(wt)]\right\} \\ \mathcal{L}\left\{\frac{d}{dt} [-w \sin(wt)]\right\} &= s \left[\frac{s^2}{s^2 + w^2} - 1\right] - [-w \sin(w \cdot 0^-)] = s \left[\frac{s^2}{s^2 + w^2} - 1\right] \\ \Rightarrow \left(-\frac{1}{w^2}\right) \cdot \mathcal{L}\{-w^2 \cos(wt)\} &= s \left[\frac{s^2}{s^2 + w^2} - 1\right] \left[-\frac{1}{w^2}\right] = \left[\frac{s^2 - s^2 - w^2}{s^2 + w^2}\right] \left[-\frac{s}{w^2}\right] = \frac{s}{s^2 + w^2} \end{aligned}$$

### 3.3.10 Polinomio e seno

Vogliamo calcolare la trasformata di:

$$t \cdot \sin(wt) \cdot \mathbf{1}(t)$$

Chiamo:  $f(t) = \sin(wt)\mathbf{1}(t)$  Allora posso applicare la proprietà di [derivata in s](#):

$$t f(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} -\frac{d}{ds} \left(\frac{w}{s^2 + w^2}\right) = \frac{2ws}{(s^2 + w^2)^2}$$

### 3.3.11 Polinomio e coseno

Vogliamo calcolare la trasformata di:

$$t \cdot \cos(wt) \cdot \mathbf{1}(t)$$

Chiamo:  $f(t) = \cos(wt) \cdot \mathbf{1}(t)$

Allora posso applicare la proprietà di [derivata in s](#):

$$t \cdot f(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} -\frac{d}{ds} \left(\frac{s}{s^2 + w^2}\right) = -\frac{s^2 + w^2 - s(2s)}{(s^2 + w^2)^2} = \frac{s^2 - w^2}{(s^2 + w^2)^2}$$

### 3.3.12 Esponenziale e seno

Grazie alla proprietà di [traslazione in s](#):

$$e^{\sigma t} \cdot \sin(wt) \cdot \mathbf{1}(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} \frac{w}{\bar{s}^2 + w^2} \Big|_{\bar{s}=s-\sigma} = \frac{w}{(s-\sigma)^2 + w^2}$$

### 3.3.13 Esponenziale e coseno

Grazie alla proprietà di [traslazione in s](#):

$$e^{\sigma t} \cdot \cos(wt) \cdot \mathbf{1}(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} \frac{\bar{s}}{\bar{s}^2 + w^2} \Big|_{\bar{s}=s-\sigma} = \frac{s-\sigma}{(s-\sigma)^2 + w^2}$$

**3.3.14 Polinomio grado 1, esponenziale e seno**

Utilizziamo la proprietà di [derivata in s](#):

$$\mathcal{L}\{t \cdot e^{\sigma t} \cdot \sin(wt) \cdot \mathbf{1}(t)\} = t \cdot f(t) = -\frac{d}{ds} \left( \frac{w}{(s-\sigma)^2 + w^2} \right) = -\left[ -\frac{w \cdot 2(s-\sigma)}{[(s-\sigma)^2 + w^2]^2} \right] = \frac{2w(s-\sigma)}{[(s-\sigma)^2 + w^2]^2}$$

**3.3.15 Polinomio grado 2, esponenziale e seno**

1. utilizziamo la proprietà di [derivazione in s](#):

$$t^2 \cdot e^{\sigma t} \cdot \sin(wt) \cdot \mathbf{1}(t) = t \cdot f(t)$$

Ma questo metodo comporta il calcolo della derivata della trasformata trovata nel paragrafo precedente e potrebbe essere un po' complicato.

2. utilizziamo la proprietà di [traslazione in s](#):

$$t^2 \cdot e^{\sigma t} \cdot \sin(wt) \cdot \mathbf{1}(t) = e^{\sigma t} \cdot f(t)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{f(t)\} &= \mathcal{L}\{t^2 \cdot \sin(wt) \cdot \mathbf{1}(t)\} = \mathcal{L}\{t \cdot [t \cdot \sin(wt) \cdot \mathbf{1}(t)]\} = \\ &= -\frac{d}{ds} \left( \frac{2ws}{(s^2 + w^2)^2} \right) = -\frac{2w(s^2 + w^2)^2 - 2ws \cdot 2(s^2 + w^2) \cdot 2s}{(s^2 + w^2)^4} = \\ &= -2w \frac{s^2 + w^2 - 4s^2}{(s^2 + w^2)^3} = 2w \frac{3s^2 - w^2}{[s^2 + w^2]^3} \\ &\Rightarrow \mathcal{L}\{e^{\sigma t} f(t)\} = 2w \frac{3(s-\sigma)^2 - w^2}{[(s-\sigma)^2 + w^2]^3} \end{aligned}$$

**3.3.16 Polinomio grado 1, esponenziale e coseno**

Utilizziamo la proprietà di [derivazione in s](#):

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{t \cdot e^{\sigma t} \cdot \cos(wt) \cdot \mathbf{1}(t)\} &= t \cdot f(t) = -\frac{d}{ds} \left( \frac{s-\sigma}{(s-\sigma)^2 + w^2} \right) = \\ &= -\frac{(s-\sigma)^2 + w^2 - 2(s-\sigma)(s-\sigma)}{[(s-\sigma)^2 + w^2]^2} = \frac{(s-\sigma)^2 - w^2}{[(s-\sigma)^2 + w^2]^2} \end{aligned}$$

**3.3.17 Polinomio grado 2, esponenziale e coseno**

1. utilizziamo la proprietà di [derivazione in s](#):

$$t^2 \cdot e^{\sigma t} \cdot \cos(wt) \cdot \mathbf{1}(t) = t \cdot f(t)$$

Ma questo metodo comporta il calcolo della derivata della trasformata trovata nel paragrafo precedente e potrebbe essere un po' complicato.

2. utilizziamo la proprietà di [traslazione in s](#):

$$t^2 \cdot e^{\sigma t} \cdot \cos(wt) \cdot \mathbf{1}(t) = e^{\sigma t} \cdot f(t)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{f(t)\} &= \mathcal{L}\{t^2 \cdot \cos(wt) \cdot \mathbf{1}(t)\} = \mathcal{L}\{t \cdot [t \cdot \cos(wt) \cdot \mathbf{1}(t)]\} = \\ &= -\frac{d}{ds} \left( \frac{s^2 - w^2}{(s^2 + w^2)^2} \right) = -\frac{2s(s^2 + w^2)^2 - (s^2 - w^2) \cdot 2 \cdot (s^2 + w^2) \cdot 2s}{(s^2 + w^2)^4} = \\ &= -\frac{2s}{(s^2 + w^2)^3} [s^2 + w^2 - 2s^2 + 2w^2] = \frac{2s^3 - 6w^2s}{[s^2 + w^2]^3} \\ &\Rightarrow \mathcal{L}\{e^{\sigma t} f(t)\} = \frac{2(s-\sigma)^3 - 6w^2(s-\sigma)}{[(s-\sigma)^2 + w^2]^3} \end{aligned}$$



**3.3.18 Prodotto di convoluzione: definizione**

$$f(t) * g(t) = \int_0^t f(\tau)g(t - \tau)d\tau \quad \text{se } f(t), g(t) \text{ nulle } \forall t < 0 \quad (3.1)$$

**Significato**

1. Supponiamo di fissare il tempo in un certo istante  $\bar{t}$
2. Ribaltiamo  $g(t)$  rispetto l'asse verticale e lo trasliamo in  $\bar{t}$
3. Calcoliamo l'integrale da 0 a  $\bar{t}$  di  $f(\bar{t}) \cdot g(\bar{t} - \tau)$ , cioè l'area sottesa dal prodotto dalle funzioni
4. Ripetiamo il procedimento per ogni  $\bar{t}$  e otteniamo una funzione che associa ad ogni istante di tempo il valore di quell'integrale

È facile dimostrare che vale la proprietà **commutativa** attraverso un cambio di variabili.

$$\int_0^t f(\tau)g(t - \tau)d\tau = \int_0^t g(\tau)f(t - \tau)d\tau$$

$$f(t) * g(t) = g(t) * f(t)$$

**3.3.19 Prodotto di convoluzione: trasformata**

$$\text{Se } f(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} F(s) \quad g(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} G(s)$$

$$\text{allora } f(t) * g(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} F(s)G(s)$$

# Capitolo 4

## Anti-Trasformata di Laplace

### 4.1 Definizione

Nel paragrafo precedente abbiamo definito l'operazione di Trasformata di Laplace:

$$f(t) \text{ definita in } [0^-; +\infty] \xrightarrow{\mathcal{L}} F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$$

Se vogliamo effettuare l'operazione inversa della trasformata:

$$f(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} F(s) \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} \tilde{f}(t)$$

Ci aspettiamo che:

$$\tilde{f}(t) \equiv f(t) \quad \forall t \in [0^-; +\infty]$$

Data una funzione  $F(s)$  dove  $s \in \mathbb{C}$  con caratteristiche tali da poter essere considerata una **trasformata di Laplace** (continuitá, derivabilitá per tutti gli ordini, ascissa di convergenza ...) di una funzione  $f(t)$ , allora vorremmo trovare  $f(t)$  almeno (solo) in  $[0^-; +\infty)$  (cioé trovare  $f(t) \cdot \mathbf{1}(t)$ ).

Senza dimostrare, la formula generale dell'anti-trasformata di Laplace é:

$$\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = \frac{1}{j2\pi} \int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} F(s)e^{st} ds \quad \sigma > \bar{\sigma} \text{ ascissa di convergenza}$$

Questa formula non la useremo mai, ma cercheremo di calcolare le antitrasformate sfruttando le **proprietá** della trasformata:

$$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\} \Rightarrow \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = f(t) \cdot \mathbf{1}(t)$$

É importante ricordarsi sempre di mettere  $\mathbf{1}(t)$  nell'anti-trasformata perché non consideriamo cosa é successo prima di zero. Se non lo mettiamo facciamo un errore perché troviamo l'anti-trasformata di una funzione diversa.

### 4.2 Esempi introduttivi

1.  $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\} = 1 \cdot \mathbf{1}(t)$
2.  $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-2}\right\} = e^{2t}\mathbf{1}(t)$  **traslazione in s**
3.  $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+2}\right\} = e^{-2t}\mathbf{1}(t)$  **traslazione in s**
4.  $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2}\right\} = t \cdot \mathbf{1}(t)$  **derivata n-esima in t**

$$\text{In generale: } \frac{1}{s^n} \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} \frac{1}{(n-1)!} t^{n-1} \cdot \mathbf{1}(t)$$

5.  $\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{(s-a)^n} \right\} = \frac{1}{(n-1)!} t^{n-1} e^{at} \mathbf{1}(t)$  [traslazione in s](#)
6.  $\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{3}{s^2+4s+13} \right\} = ?$

Completiamo i quadrati del denominatore:

$$s^2 + 4s + 13 = s^2 + 2 \cdot (2s) + 2^2 + 9 = (s + 2)^2 + (3)^2$$

In generale se abbiamo un polinomio di secondo grado del tipo:

$$[s - (\sigma + jw)][s - (s - jw)] = [(s - \sigma) + jw][(s - \sigma) - jw] = (s - \sigma)^2 + w^2$$

ha come radici:  $\sigma \pm jw$ .

Quindi nel nostro caso  $\sigma = -2$   $w = 3$

$$\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{3}{(s+2)^2+9} \right\} = e^{-2t} \sin(3t) \mathbf{1}(t)$$

7.  $\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{12}{(s+2)^2+9} \right\} = 4 \cdot \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{3}{(s+2)^2+9} \right\} = 4e^{-2t} \sin(3t) \mathbf{1}(t)$
8.  $\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{s+2}{(s+2)^2+9} \right\} = e^{-2t} \cos(3t) \mathbf{1}(t)$
9.  $\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{s+5}{s^2+4s+13} \right\} = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{s+2}{(s+2)^2+9} + \frac{3}{(s+2)^2+9} \right\} = e^{-2t} [\cos(3t) + \sin(3t)] \mathbf{1}(t)$
10.  $\mathcal{L}^{-1} \left\{ e^{-4s} \frac{3}{(s+2)^2+9} \right\} = ?$

$$\frac{3}{(s+2)^2+9} \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} e^{-2t} \sin(3t) \mathbf{1}(t)$$

L'esponenziale in s comporta una [traslazione in t](#):

$$f(t-T) \mathbf{1}(t-T) \xrightarrow{\mathcal{L}} e^{-sT} F(s)$$

$$e^{-4s} \frac{3}{(s+2)^2+9} \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} e^{-2(t-4)} \sin[3(t-4)] \mathbf{1}(t-4)$$

Quindi otteniamo in generale:

$$F(s)e^{-sT} \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} f(t-T) \mathbf{1}(t-T)$$

### 4.3 Funzioni razionali

$$F(s) = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0} = \frac{B(s)}{A(s)}$$

Supponiamo che  $a_n \neq 0, b_m \neq 0$  così  $m$  e  $n$  sono effettivamente i gradi dei polinomi:

$$m = \deg \{B(s)\}, n = \deg \{A(s)\}$$

- $n \geq m \Rightarrow F(s)$  **propria**
- $n > m \Rightarrow F(s)$  **strettamente propria**
- $n = m \Rightarrow F(s)$  **semplicemente propria**

### 4.3.1 Fattorizzazione di un polinomio

$$F(s) = \frac{B(s)}{A(s)} = \frac{b_m (s - z_1)^{m_1} \dots (s - z_h)^{m_h}}{a_n (s - p_1)^{n_1} \dots (s - p_k)^{n_k}}$$

$z_1, z_2, \dots, z_h$  sono gli ZERI (le radici distinte di B(s))  
 $p_1, p_2, \dots, p_k$  sono i POLI (le radici distinte di A(s))  
 $m_1, m_2, \dots, m_h$  sono le molteplicitá degli zeri  $\Rightarrow \sum_{i=1}^h m_i = m$   
 $n_1, n_2, \dots, n_k$  sono le molteplicitá dei poli  $\Rightarrow \sum_{i=1}^k n_i = n$

## 4.4 Funzione razionale strettamente propria

$$\begin{aligned}
 F(s) = \frac{B(s)}{A(s)} &= c_{1,1} \frac{1}{(s - p_1)} + c_{1,2} \frac{1}{(s - p_1)^2} + \dots + c_{1,n_1} \frac{1}{(s - p_1)^{n_1}} + \\
 &+ c_{2,1} \frac{1}{(s - p_2)} + \dots + c_{2,n_2} \frac{1}{(s - p_2)^{n_2}} + \\
 &+ \dots + \\
 &+ c_{k,1} \frac{1}{(s - p_k)} + \dots + c_{k,n_k} \frac{1}{(s - p_k)^{n_k}} = \\
 &= \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{n_i} c_{i,j} \frac{1}{(s - p_i)^j}
 \end{aligned}$$

$c_{i,j}$  dove  $i$  indica il polo, mentre  $j$  indica la molteplicitá del polo. Ma come calcolare questi coefficienti?

- Concentriamoci sul polo  $p_l$  con molteplicitá  $n_l$ . Quindi calcoliamo:

$$\begin{aligned}
 (s - p_l)^{n_l} F(s) &= (s - p_l)^{n_l} \cdot \left( \sum_{i \neq l} \sum_{j=1}^{n_i} c_{i,j} \frac{1}{(s - p_i)^j} \right) + c_{l,1} (s - p_l)^{n_l-1} + c_{l,2} (s - p_l)^{n_l-2} + \dots + \\
 &+ c_{l,n_l-1} (s - p_l)^{n_l-(n_l-1)} + c_{l,n_l}
 \end{aligned}$$

Calcolando questa espressione in  $p_l$  tutti i termini si annullano tranne uno:

$$c_{l,n_l} = \left[ (s - p_l)^{n_l} \cdot F(s) \right]_{s=p_l}$$

- Deriviamo l'espressione e calcoliamola in  $p_l$ :

$$c_{l,n_l-1} = \left[ \frac{d}{ds} (s - p_l)^{n_l} \cdot F(s) \right]_{s=p_l}$$

...

- Continuando a derivare stando attenti ai coefficienti dovuti alla derivazione:

$$c_{l,q} = \frac{1}{(n_l - q)!} \left[ \frac{d^{n_l-q}}{ds^{n_l-q}} (s - p_l)^{n_l} \cdot F(s) \right]_{s=p_l} \in \mathbb{C} \quad (4.1)$$

L'espressione 4.1 é detta **residuo q-esimo** del polo l-esimo, dove:

- $p_l$  é l'l-esimo polo
- $n_l$  é la molteplicitá dell'l-esimo polo
- $l$  é l'indice del residuo: varia tra 1 e  $n_l$

**Esempio di residui complessi**

$$\frac{1}{s^2 + 4} = c_{1,1} \frac{1}{s - 2j} + c_{2,1} \frac{1}{s + 2j} \quad p_1 = 2j, \quad p_2 = -2j$$

Usiamo la formula 4.1 per il primo coefficiente dove  $n_l = 1 \quad q = 1$ :

- $p_1 = 2j$ :

$$c_{1,1} = \frac{1}{(1-1)!} \cdot \left[ (s-2j) \cdot \frac{1}{(s-2j)(s+2j)} \right]_{s=2j} = \frac{1}{s+2j} \Big|_{s=2j} = \frac{1}{4j}$$

- $p_2 = -2j$ :

$$c_{2,1} = \frac{1}{(1-1)!} \cdot \left[ (s+2j) \cdot \frac{1}{(s-2j)(s+2j)} \right]_{s=-2j} = \frac{1}{s-2j} \Big|_{s=-2j} = \frac{1}{-4j}$$

**Esempio di residui reali**

$$\frac{s}{s^2 - 1} \quad p_1 = -1 \quad (n_1 = 1) \quad p_2 = 1 \quad (n_2 = 1)$$

$$\frac{s}{s^2 - 1} = \frac{c_{1,1}}{s+1} + \frac{c_{2,1}}{s-1} = \frac{c_{1,1}(s-1) + c_{2,1}(s+1)}{s^2 - 1} = \frac{(c_{1,1} + c_{2,1})s + (c_{2,1} - c_{1,1})}{s^2 - 1}$$

$$\begin{cases} c_{1,1} + c_{2,1} = 1 \\ c_{1,1} = c_{2,1} \end{cases} \Rightarrow c_{1,1} = c_{2,1} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{s}{s^2 - 1} = \frac{1}{2} \frac{1}{s+1} + \frac{1}{2} \frac{1}{s-1}$$

## 4.5 Generalizzazione dei fratti semplici

In generale data una funzione razionale  $F(s) = \frac{B(s)}{A(s)}$  strettamente propria a coefficienti reali, dove le radici di  $A(s)$  sono:

- $p_1 \dots p_r$  poli reali distinti
- $n_1 \dots n_r$  molteplicità dei poli reali
- $\bar{p}_1 \dots \bar{p}_c$  coppie coniugate di poli complessi
- $\bar{n}_1 \dots \bar{n}_c$  molteplicità dei poli complessi
- $c_{i,l}, \bar{c}_{i,l}^{\sin}, \bar{c}_{i,l}^{\cos} \in \mathbb{R}$

$$F(s) = \frac{B(s)}{A(s)} = \sum_{i=1}^r \sum_{l=1}^{n_i} c_{i,l} \frac{1}{(s-p_i)^l} + \sum_{i=1}^c \sum_{l=1}^{\bar{n}_i} \left[ \bar{c}_{i,l}^{\sin} \frac{\text{Polinomio}_{i,l}^{\sin}(s)}{[(s-\sigma_i)^2 + w_i^2]^l} + \bar{c}_{i,l}^{\cos} \frac{\text{Polinomio}_{i,l}^{\cos}(s)}{[(s-\sigma_i)^2 + w_i^2]^l} \right] \quad (4.2)$$

Bisogna notare che i poli complessi essendo coniugati sono *spariti* svolgendo qualche passaggio matematico.

Ad esempio in un polinomio di secondo grado con due radici complesse  $p_1 = \sigma + jw$  e  $p_2 = \sigma - jw$ :

$$\begin{aligned}(s - p_1)(s - p_2) &= [s - (\sigma + jw)][s - (\sigma - jw)] = \\ &= [(s - \sigma) - jw][(s - \sigma) + jw] = (s - \sigma)^2 + w^2\end{aligned}$$

Quindi possiamo distinguere due gruppi:

- i fratti semplici a **poli reali** si antitrasformano essenzialmente con degli esponenziali. Se i poli hanno una molteplicità maggiore di uno, allora compariranno anche dei polinomi:

$$F(s) \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} c_{i,l} \cdot \frac{1}{(l-1)!} \cdot t^{l-1} \cdot e^{p_i t} \cdot \mathbf{1}(t)$$

- i fratti semplici a **poli complessi** invece si antitrasformano con seni e coseni:

$$F(s) \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} e^{\sigma t} \sin(wt) \cdot [A_1 + A_2 t + A_3 t^2 + \dots] + e^{\sigma t} \cos(wt) \cdot [B_1 + B_2 t + B_3 t^2 + \dots]$$

### 4.5.1 Osservazioni

(IMPORTANTE) Se non esistono semplificazioni tra numeratore e denominatore (non esiste una radice comune tra i due), allora i residui relativi ai fratti semplici di grado massimo per ciascun polo sono diversi da zero.

#### Esempio di poli complessi

$$\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{3s + 10}{s^2 + 4s + 13} \right\} = ?$$

Dobbiamo scomporre la funzione razionale in fratti semplici. In generale:

$$\frac{as + b}{(s - \sigma)^2 + w^2} = A \frac{w}{(s - \sigma)^2 + w^2} + B \frac{(s - \sigma)}{(s - \sigma)^2 + w^2} = \frac{Aw + Bs - B\sigma}{(s - \sigma)^2 + w^2}$$

- Riscriviamo la funzione razionale come combinazione lineare di funzioni razionali in cui a numeratore abbiamo un polinomio di grado 0 e uno di grado 1. Con una combinazione lineare di un qualsiasi polinomio di grado 0 con un polinomio di grado 1, possiamo scrivere un qualsiasi polinomio di grado 1, come quello di partenza  $as + b$ .
- Attraverso il principio di uguaglianza fra polinomi (due polinomi sono uguali se i coefficienti omologhi sono uguali) confrontiamo il nuovo polinomio  $Aw + Bs - B\sigma$  con quello di partenza  $as + b$ .
- Quindi alla fine dobbiamo risolvere un sistema lineare di due equazioni in 2 incognite con un'unica soluzione perché ha rango massimo: 
$$\begin{cases} B & = a \\ Aw + B\sigma & = b \end{cases}$$

Quindi nel nostro esempio otteniamo:

$$\frac{3s + 10}{s^2 + 4s + 13} = A \frac{3}{(s + 2)^2 + 9} + B \frac{s + 2}{(s + 2)^2 + 9} = \frac{3A + Bs + 2B}{(s + 2)^2 + 9}$$

$$\begin{cases} B & = 3 \\ 3A + 2B & = 10 \end{cases} \quad \begin{cases} B & = 3 \\ A & = \frac{4}{3} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{4}{3} \frac{3}{(s + 2)^2 + 9} + 3 \frac{s + 2}{(s + 2)^2 + 9}$$

$$\xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} \frac{4}{3} e^{-2t} \sin(3t) \mathbf{1}(t) + 3e^{-2t} \cos(3t) \mathbf{1}(t)$$

**Esempio di poli complessi 2** Bisogna utilizzare la trasformata in  $s$  del polinomio + esponenziale + senoide:

$$\frac{\text{polinomio grado } \leq 3}{[(s-3)^2 + 4]^2} = A \frac{2}{(s-3)^2 + 4} + B \frac{s-3}{(s-3)^2 + 4} + C \frac{4 \cdot (s-3)}{[(s-3)^2 + 4]^2} + D \frac{(s-3)^2 - 4}{[(s-3)^2 + 4]^2}$$

Dopo aver risolto un sistema per trovare i quattro coefficienti, l'anti-trasformata é:

$$f(t) = e^{3t}[A \sin(2t) + B \cos(2t) + t C \sin(2t) + t D \cos(2t)]$$

## 4.6 Funzione razionale non strettamente propria

Partiamo con un esempio di una funzione non strettamente propria:  $\partial \deg \{B(s)\} \geq \partial \deg \{A(s)\}$

$$F(s) = \frac{B(s)}{A(s)} = \frac{s^2 + 1}{s^2 - 1}$$

Effettuiamo la divisione tra i due polinomi:

$$\begin{array}{r|l} s^2 & +1 \\ s^2 & -1 \\ \hline 0 & 2 \end{array} \quad \left| \begin{array}{l} s^2 - 1 \\ 1 \end{array} \right.$$

Ci fermiamo nella divisione quando il grado del resto é strettamente minore del grado del divisore. Se si continuasse, si otterrebbero termini con potenze negative.

$$\frac{B(s)}{A(s)} = \frac{s^2 + 1}{s^2 - 1} = Q(s) + \frac{R(s)}{A(s)} = 1 + \frac{2}{s^2 - 1}$$

dove  $Q(s)$  é il polinomio *quoziente*,  $R(s)$  il polinomio *resto*.

A secondo membro abbiamo ottenuto una funzione razionale strettamente propria. Quindi applichiamo i fratti semplici:

$$\frac{2}{s^2 - 1} = \frac{A}{s + 1} + \frac{B}{s - 1} = \frac{A(s - 1) + B(s + 1)}{s^2 - 1} = \frac{(A + B)s + (B - A)}{s^2 - 1}$$

$$\begin{cases} A + B = 0 \\ B - A = 2 \end{cases} \quad \begin{cases} B = -A \\ B = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} A = -1 \\ B = 1 \end{cases}$$

Antitrasformiamo:

$$F(s) = 1 - \frac{1}{s + 1} + \frac{1}{s - 1} \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} \delta(t) + (-e^{-t} + e^t) \cdot \mathbf{1}(t)$$

In generale  $m \geq n$ ,  $m = \partial \deg \{B(s)\}$   $n = \partial \deg \{A(s)\}$ :

$$F(s) = \frac{B(s)}{A(s)} = k_0 + k_1 s + k_2 s^2 + \dots + k_{m-n} s^{m-n} + \frac{\tilde{B}(s)}{A(s)}$$

con  $\partial \deg \{\tilde{B}(s)\} < \partial \deg \{A(s)\}$  e quindi la frazione resto  $\frac{\tilde{B}(s)}{A(s)}$  é risolvibile con i fratti semplici.

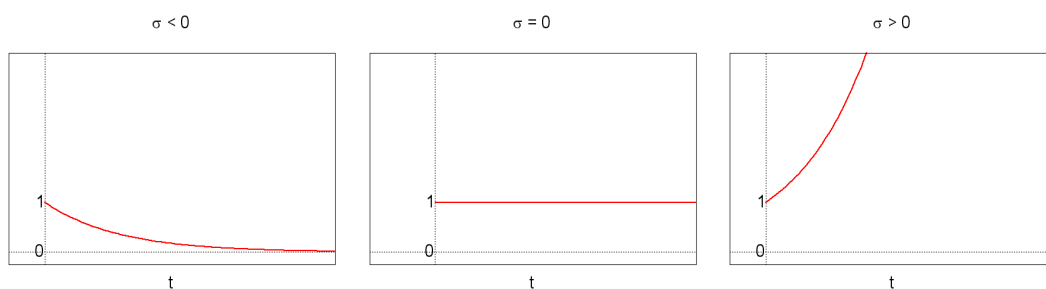
$$F(s) \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} \delta(t) + \frac{d}{dt} \delta(t) + \frac{d^2}{dt^2} \delta(t) + \dots + \frac{d^{m-n}}{dt^{m-n}} \delta(t) + \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{\tilde{B}(s)}{A(s)} \right\}$$

## 4.7 Andamento nel tempo dell'antitrasformata

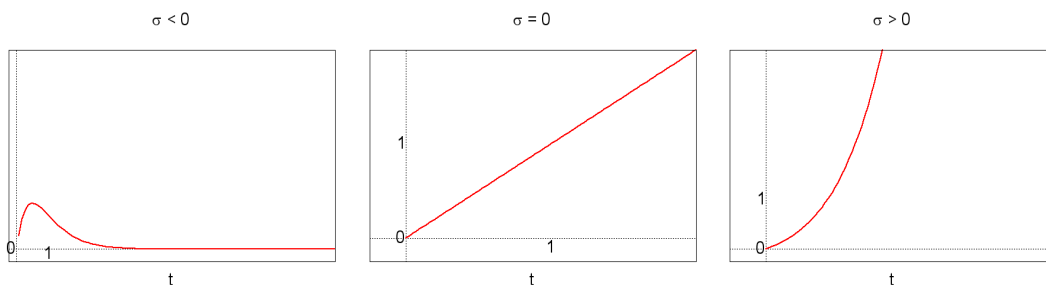
- $\Re\{p\} < 0 \Rightarrow$  l'antitrasformata tende a zero
- $\Re\{p\} = 0$  e molteplicitá = 1  $\Rightarrow$  non tende a zero, ma é limitata
- $\Re\{p\} > 0$  oppure  $\Re\{p\} = 0$  e molteplicitá  $> 1 \Rightarrow$  non é limitata e diverge a  $\pm\infty$

**Poli reali:**  $p = \sigma \in \mathbb{R}$

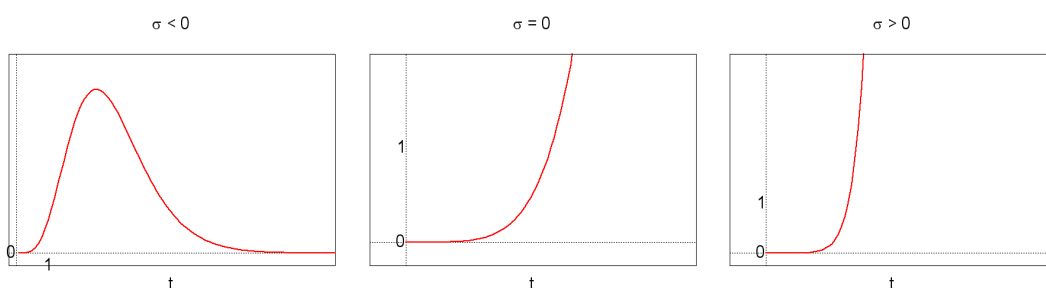
$$\frac{1}{s - \sigma} \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} e^{\sigma t} \mathbf{1}(t)$$



$$\frac{1}{(s - \sigma)^2} \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} t e^{\sigma t} \mathbf{1}(t)$$



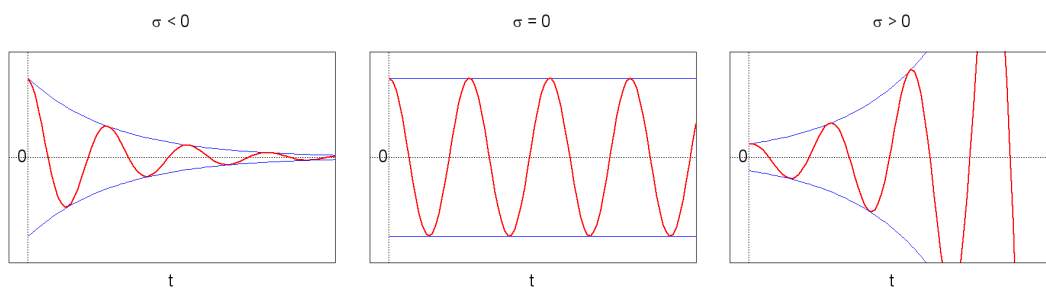
$$\frac{1}{(s - \sigma)^n} \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} \frac{1}{(n - 1)!} t^{n-1} e^{\sigma t} \mathbf{1}(t)$$



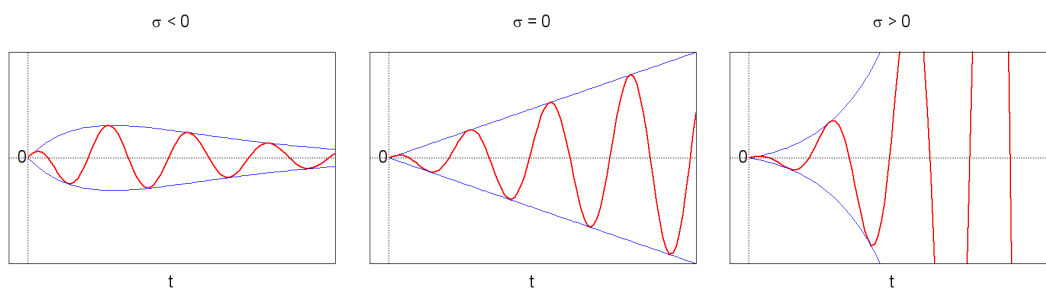
**Poli complessi:**  $p = \sigma \pm jw$   $w \neq 0$



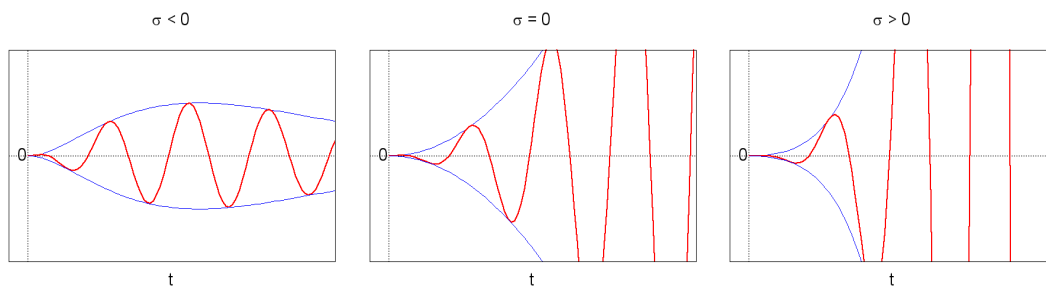
$$\frac{c}{s-p} + \frac{c^*}{s-p^*} \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} e^{\sigma t} (A \sin wt + B \cos wt) = D e^{\sigma t} \cos(wt + \phi)$$



$$\frac{c}{(s-p)^2} + \frac{c^*}{(s-p^*)^2} \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} D t e^{\sigma t} \cos(wt + \phi)$$



$$\frac{c}{(s-p)^n} + \frac{c^*}{(s-p^*)^n} \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} D \frac{1}{(n-1)!} t^{n-1} e^{\sigma t} \cos(wt + \phi)$$



## 4.8 Teorema del valore iniziale

$$f(0^+) = \lim_{s \rightarrow +\infty} s \cdot F(s)$$

Questo teorema non richiede particolari ipotesi, ma nel caso delle funzioni razionali non strettamente proprie ( $m \geq n$ ) bisogna applicarlo sul resto della divisione.

**Esempio: funzione razionale non strettamente propria**

$$F(s) = \frac{s+1}{s-1}$$

Se applicassimo direttamente il teorema, otterremmo un risultato sbagliato:

$$f(0^+) = \lim_{s \rightarrow +\infty} s \frac{s+1}{s-1} = +\infty$$

In realtà dobbiamo prima calcolare il resto della divisione tra numeratore e denominatore:

$$F(s) = \frac{s+1}{s-1} = \frac{s-1+1+1}{s-1} = \frac{s-1}{s-1} + \frac{2}{s-1} = 1 + \frac{2}{s-1}$$

$$f(0^+) = \lim_{s \rightarrow +\infty} s \frac{2}{s-1} = 2$$

## 4.9 Teorema del valore finale

Sia  $f(t)$  una funzione Laplace-trasformabile con trasformata  $F(s)$

$$\text{se } f_\infty = \lim_{t \rightarrow \infty} f(t) \text{ esiste finito } \Rightarrow f_\infty = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot F(s)$$

Nel caso di poli complessi, l'antitrasformata oscilla attorno a un valore e quindi il teorema non è applicabile perché il limite non esiste. Se però **non** ci sono poli a  $\Re\{p\} > 0$ , allora il risultato del teorema è interpretabile come "valore medio asintotico".

**Esempio: non applicabile**

$$F(s) = \frac{2}{s^2 + 4} \quad \text{i poli sono: } p = \pm 2j$$

$$f(t) = \sin(2t) \cdot \mathbf{1}(t)$$

Il teorema non è applicabile perché la funzione oscilla. Se comunque calcolassi quel limite ottengo:

$$\lim_{s \rightarrow 0} sF(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{2s}{s^2 + 4} = 0$$

**Esempio: non applicabile**

$$F(s) = \frac{1}{s^2 - 1} = \frac{A}{s+1} + \frac{B}{s-1}$$

Non si può applicare il teorema perché uno dei due poli è positivo e quindi l'antitrasformata  $f(t)$  diverge.

**Esempio: applicabile**

$$F(s) = \frac{1}{s+1} \quad p = -1$$

$$f_\infty = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s}{s+1} = 0$$

## 4.10 Esercizi

**\*\* Esercizio 2**      **Poli reali multipli, poli complessi semplici**

$$F(s) = \frac{s^3 + s^2 + 14s - 27}{s^4 - 4s^3 + 13s^2 - 36s + 36}$$

Per fattorizzare il denominatore cerchiamo le sue radici attraverso Ruffini. Con 2 il denominatore si annulla, quindi dividiamo il polinomio per  $(s - 2)$ :

$$\begin{array}{r|l} s^4 & -4s^3 & +13s^2 & -36s & +36 & s-2 \\ s^4 & -2s^3 & & & & \hline // & -2s^3 & +13s^2 & -36s & +36 & \\ & -2s^3 & +4s^2 & & & \\ \hline & & 9s^2 & -36s & +36 & \\ & & 9s^2 & -18s & & \\ \hline & & & -18s & +36 & \end{array}$$

$$Den(s) = (s - 2)(s^3 - 2s^2 + 9s - 18) = (s - 2)[s^2(s - 2) + 9(s - 2)] = (s - 2)^2(s^2 + 9)$$

$$\begin{cases} p_1 = 2 \\ n_1 = 2 \end{cases} \quad \begin{cases} p_2 = +3j \\ n_2 = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} p_3 = -3j \\ n_3 = 1 \end{cases}$$

$$F(s) = c_{11} \frac{1}{s-2} + c_{12} \frac{1}{(s-2)^2} + c_{21} \frac{1}{s-3j} + c_{31} \frac{1}{s+3j}$$

$c_{11}$  potrebbe essere nullo, mentre mi aspetto che  $c_{21} \neq 0$ , altrimenti non potrebbe esistere il fattore  $(s - 2)^2$  nel denominatore.

Per calcolare i residui dei poli reali usiamo la formula 4.1:

- $c_{11} \quad q = 1 \quad n_1 = 2$

$$\begin{aligned} c_{11} &= \frac{1}{(2-1)!} \lim_{s \rightarrow p_1} \frac{d}{ds} (s-2)^2 F(s) = \lim_{s \rightarrow 2} \frac{d}{ds} \left( \frac{s^3 + s^2 + 14s - 27}{s^2 + 9} \right) = \\ &= \lim_{s \rightarrow 2} \frac{(3s^2 + 2s + 14)(s^2 + 9) - (s^3 + s^2 + 14s - 27)2s}{(s^2 + 9)^2} = 2 \end{aligned}$$

- $c_{12} \quad q = 2 \quad n_1 = 2$

$$c_{12} = \frac{1}{(2-2)!} \lim_{s \rightarrow 2} \frac{d^{2-2}}{ds^{2-2}} \frac{s^3 + s^2 + 14s - 27}{s^2 + 9} = 1$$

Per calcolare i residui dei poli complessi, la formula precedente conduce a calcoli complicati. É meglio ricavarli uguagliando i polinomi:

$$\begin{aligned} F(s) &= 2 \frac{1}{s-2} + \frac{1}{(s-2)^2} + A \frac{3}{s^2+9} + B \frac{s}{s^2+9} \\ &= \frac{2(s-2)(s^2+9) + (s^2+9) + 3A(s-2)^2 + Bs(s-2)^2}{(s-2)^2(s^2+9)} = \\ &= \frac{2s^3 + 18s - 4s^2 - 36 + s^2 + 9 + 3As^2 - 12As + 12A + Bs^3 - 4Bs^2 + 4Bs}{(s-2)^2(s^2+9)} = \\ &= \frac{(B+2)s^3 + (3A-4B-3)s^2 + (4B-12A+18)s + (12A-27)}{(s-2)^2(s^2+9)} \end{aligned}$$

Abbiamo un sistema ridondante di 4 equazioni in 2 incognite:

$$\begin{cases} B + 2 = 1 \\ 3A - 4B - 3 = 1 \\ 4B - 12A + 18 = 14 \\ 12A - 27 = -27 \end{cases} \quad \begin{cases} B = -1 \\ A = 0 \end{cases}$$

$$F(s) = \frac{2}{s-2} + \frac{1}{(s-2)^2} - \frac{s}{s^2+9}$$

Quindi si può facilmente ricavare l'antitrasformata:

$$f(t) = [2e^{2t} + te^{2t} - \cos(3t)] \cdot 1(t)$$

### \*\* Esercizio 3    Poli reali multipli, poli complessi semplici

$$F(s) = \frac{8s^3 + 33s^2 + 42s + 52}{s^5 + 6s^4 + 21s^3 + 26s^2}$$

Fattorizziamo il denominatore:

$$Den(s) = s^2(s^3 + 6s^2 + 21s + 26)$$

Usiamo il teorema di Ruffini per fattorizzare il polinomio di terzo grado:

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & 6 & 21 & 26 \\ -2 & & -2 & -8 & -26 \\ \hline & 1 & 4 & 13 & 0 \end{array}$$

$$Den(s) = s^2(s+2)(s^2+4s+13)$$

Le soluzioni del polinomio di secondo grado si possono trovare:

- completamento dei quadrati

$$s^2 + 4s + 4 - 4 + 13 = (s+2)^2 + 9 \Rightarrow \sigma = -2 \quad w = 3$$

- formula risolutiva delle equazioni di secondo grado

$$s = \frac{-4 \pm \sqrt{16 - 52}}{2} = 2 \pm 3j \Rightarrow \sigma = -2 \quad w = 3$$

$$\begin{cases} p_1 = 0 \\ n_1 = 2 \end{cases} \quad \begin{cases} p_2 = -2 \\ n_2 = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} p_3 = 2 - 3j \\ n_3 = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} p_3 = 2 + 3j \\ n_3 = 1 \end{cases}$$

$$F(s) = c_{11} \frac{1}{s} + c_{12} \frac{1}{s^2} + c_{21} \frac{1}{s+2} + A \frac{3}{[(s+2)^2+9]} + B \frac{s+2}{[(s+2)^2+9]}$$

Calcoliamo  $c_{11}, c_{12}, c_{21}$  con la formula dei residui:

- $c_{11}$ :  $p_1 = 0 \quad n_1 = 2 \quad q = 1$

$$c_{11} = \frac{1}{(2-1)!} \lim_{s \rightarrow 0} \frac{d}{ds} s^2 F(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{d}{ds} \frac{8s^3 + 33s^2 + 42s + 52}{s^3 + 6s^2 + 21s + 26} =$$

quando  $s \rightarrow 0$  ci interessano solo i termini noti

$$= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{(\dots + 42)(\dots + 26) - (\dots + 21)(\dots + 52)}{(\dots + 26)^2} = \frac{42 \cdot 26 - 21 \cdot 52}{26^2} = 0$$

- $c_{12}$ :  $p_1 = 0 \quad n_1 = 2 \quad q = 2$

$$c_{12} = \lim_{s \rightarrow 0} s^2 F(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{\dots + 52}{\dots + 26} = 2$$

$$\bullet c_{21}: \quad p_1 = -2 \quad n_1 = 1 \quad q = 1$$

$$c_{21} = \lim_{s \rightarrow -2} (s+2)F(s) = \lim_{s \rightarrow -2} \frac{8s^3 + 33s^2 + 42s + 52}{s^4 + 4s^3 + 13s^2} = 1$$

Calcoliamo  $A$  e  $B$  attraverso il sistema:

$$\begin{aligned} F(s) &= \frac{2}{s^2} + \frac{1}{s+2} + A \frac{3}{(s+2)^2 + 9} + B \frac{s+2}{(s+2)^2 + 9} = \\ &= \frac{2(s+2)[s^2 + 4s + 13] + s^2[s^2 + 4s + 13] + 3As^2(s+2) + B(s+2)s^2(s+2)}{s^2(s+2)[(s+2)^2 + 9]} = \\ &= \frac{2s^3 + 8s^2 + 26s + 4s^2 + 16s + 52}{s^2(s+2)[(s+2)^2 + 9]} + \\ &\quad + \frac{s^4 + 4s^3 + 13s^2 + 3As^3 + 6As^2 + Bs^4 + 4Bs^3 + 4Bs^2}{s^2(s+2)[(s+2)^2 + 9]} = \end{aligned}$$

poiché ho 2 incognite mi servono solo 2 equazioni: posso ignorare le altre

$$= \frac{(B+1)s^4 + (3A+4B+6)s^3 + \dots}{s^2(s+2)[(s+2)^2 + 9]}$$

$$\begin{cases} B+1 = 0 \\ 3A-4+6 = 8 \end{cases} \quad \begin{cases} B = -1 \\ A = 2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow F(s) = \frac{2}{s^2} + \frac{1}{s+2} + 2 \frac{3}{[(s+2)^2 + 9]} - \frac{s+2}{[(s+2)^2 + 9]}$$

Quindi otteniamo:

$$f(t) = (2t + e^{-2t} + 2e^{-2t} \sin 3t - e^{-2t} \cos 3t) \cdot 1(t)$$

### \*\*\* Esercizio 4      Poli reali semplici, poli complessi multipli

$$F(s) = \frac{2s^4 - 6s^3 + 22s^2 - 18s + 16}{(s+1)[(s-1)^2 + 4]^2}$$

$$\begin{cases} p_1 = -1 \\ n_1 = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} p_2 = 1 - 2j \\ n_2 = 2 \end{cases} \quad \begin{cases} p_3 = 1 + 2j \\ n_3 = 2 \end{cases}$$

$$F(s) = c_{11} \frac{1}{s+1} + A \frac{2}{[(s-1)^2 + 4]} + B \frac{s-1}{[(s-1)^2 + 4]} + C \frac{4(s-1)}{[(s-1)^2 + 4]^2} + D \frac{(s-1)^2 - 4}{[(s-1)^2 + 4]^2}$$

$A$  e  $B$  possono essere nulli;  $C$  e  $D$  possono essere nulli, ma non contemporaneamente:

$$c_{11} = \lim_{s \rightarrow -1} (s+1)F(s) = \frac{2 + 6 + 22 + 18 + 16}{64} = 1$$

Ancora dobbiamo trovare  $A, B, C, D$  quindi ci servono 4 equazioni. Per semplificare i calcoli:

$$\begin{aligned} R(s) &= F(s) - \frac{1}{s+1} = \frac{2s^4 - 6s^3 + 22s^2 - 18s + 16}{(s+1)[(s-1)^2 + 4]^2} - \frac{1}{s+1} = \\ &= \frac{2s^4 - 6s^3 + 22s^2 - 18s + 16 - [(s-1)^2 + 4]^2}{(s+1)[(s-1)^2 + 4]^2} = \\ &= \dots = \frac{s^4 - 2s^3 - 8s^2 + 2s - 9}{(s+1)[(s-1)^2 + 4]^2} = \frac{s^3 - 3s^2 + 11s - 9}{[(s-1)^2 + 4]^2} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow F(s) = \frac{1}{s+1} + \frac{s^3 - 3s^2 + 11s - 9}{[(s-1) + 4]^2}$$

Adesso riscriviamo  $F(s)$  senza considerare il termine  $\frac{1}{s-1}$ :

$$\begin{aligned} & A \frac{2}{[(s-1)^2 + 4]} + B \frac{s-1}{[(s-1)^2 + 4]} + C \frac{4(s-1)}{[(s-1)^2 + 4]^2} + D \frac{(s-1)^2 - 4}{[(s-1)^2 + 4]^2} = \\ & = \frac{[2A + B(s-1)][s^2 - 2s + 5] + 4C(s-1) + D[(s-1)^2 - 4]}{[(s-1) + 4]^2} = \\ & = \frac{Bs^3 + (2A + 3B + D)s^2 + (10A - 5B - 4C - 2D)s + (10A - 5B - 4C - 3D)}{[(s-1) + 4]^2} \end{aligned}$$

Uguagliamo i polinomi e ricaviamo le incognite:

$$\begin{cases} B = 1 \\ 2A + 3 + D = -3 \\ -4A + 7 + 4C - 2D = 11 \\ 10A - 5 - 4C - 3D = -9 \end{cases} \quad \begin{cases} B = 1 \\ -2A = D + 6 \\ 6A - 5D = 0 \\ -2A + 2C - D = 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} B = 1 \\ -2A = D + 6 \\ 6A - 5D = 0 \\ D + 6 + 2C - D = 2 \end{cases} \quad \begin{cases} A = -\frac{15}{8} \\ B = 1 \\ C = -2 \\ D = -\frac{9}{4} \end{cases}$$

Quindi otteniamo:

$$f(t) = \left[ 1 \cdot e^{-t} - \frac{15}{8} e^t \sin 2t + 1 \cdot \cos 2t - 2 \cdot t e^t \sin 2t - \frac{9}{4} t e^t \cos 2t \right] \cdot 1(t)$$

# Capitolo 5

## Sistemi lineari

### 5.1 $\mathcal{L}^{-1}$ applicato a LDE a coefficienti costanti

Consideriamo una generica equazione differenziale lineare (LDE) a coefficienti costanti:

$$y^{(n)}(t) + a_{n-1}y^{(n-1)}(t) + \dots + a_1y'(t) + a_0y(t) = b_mu^{(m)}(t) + \dots + b_0u(t) \quad (5.1)$$

Dobbiamo trovare la soluzione  $y(t)$  che soddisfi questa equazione dato l'ingresso  $u(t)$  e le eventuali condizioni al contorno.

Chiamiamo  $D$  l'operatore derivata rispetto al tempo:

$$D = \frac{d}{dt} \Rightarrow y^{(k)}(t) = D^k y(t)$$

$$A(D) = D^n + a_{n-1}D^{n-1} + \dots + a_1D + a_0$$

$$B(D) = b_mD^m + b_{m-1}D^{m-1} + \dots + b_1D + b_0$$

Allora l'equazione 5.1 diventa:

$$A(D)y(t) = B(D)u(t)$$

Applichiamo la trasformata di Laplace:

$$\mathcal{L} \left\{ y^{(n)}(t) + a_{n-1}y^{(n-1)}(t) + \dots + a_1y'(t) + a_0y(t) \right\} = \mathcal{L} \left\{ b_mu^{(m)}(t) + \dots + b_0u(t) \right\}$$

Sfrutto la proprietà di linearità e applico la trasformata ad ogni singolo termine. Inoltre chiamo  $\mathcal{L} \{y(t)\} = Y(s)$  e  $\mathcal{L} \{u(t)\} = U(s)$ :

$$\begin{aligned} y^{(n)}(t) &\xrightarrow{\mathcal{L}} s^n Y(s) && - \left[ s^{n-1}y(0^-) + \dots + y^{(n-1)}(0^-) \right] \\ +a_{n-1}y^{(n-1)}(t) &\xrightarrow{\mathcal{L}} a_{n-1}s^{n-1}Y(s) && - a_{n-1} \left[ s^{n-2}y(0^-) + \dots + y^{(n-2)}(0^-) \right] \\ &\dots && \\ +a_1y'(t) &\xrightarrow{\mathcal{L}} a_1sY(s) && - a_1y(0^-) \\ +a_0y(t) &\xrightarrow{\mathcal{L}} a_0Y(s) = && \\ = b_mu^{(m)}(t) &\xrightarrow{\mathcal{L}} b_ms^mU(s) && - b_m \left[ s^{m-1}u(0^-) + \dots + u^{(m-1)}(0^-) \right] \\ &\dots && \\ +b_1y'(t) &\xrightarrow{\mathcal{L}} b_1sU(s) && - b_1u(0^-) \\ +b_0u(t) &\xrightarrow{\mathcal{L}} b_0U(s) && \end{aligned}$$

I coefficienti di  $Y(s)$  costituiscono proprio il polinomio  $A$  calcolato in  $s$ , mentre i coefficienti di  $U(s)$  sono il polinomio  $B$  calcolato in  $s$ . Se raccolgo  $Y(s)$  e  $U(s)$ :

$$A(s)Y(s) - I_y(s) = B(s)U(s) - I_u(s)$$

dove:

- $I_y(s)$  é un polinomio in  $s$  con grado massimo pari a  $n-1$  e coefficienti dipendenti dalle condizioni iniziali  $y(0^-) \dots y^{(n-1)}(0^-)$
- $I_u(s)$  é un polinomio in  $s$  con grado massimo pari a  $m-1$  e coefficienti dipendenti dalle condizioni iniziali  $u(0^-) \dots u^{(m-1)}(0^-)$

La soluzione dell'equazione differenziale nel dominio di Laplace é:

$$Y(s) = \frac{B(s)}{A(s)}U(s) + \frac{I(s)}{A(s)} \quad \text{con } I(s) = I_y(s) - I_u(s) \quad (5.2)$$

Quindi per trovare la soluzione nel dominio del tempo basta anti-trasformare:

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1} \{Y(s)\}$$

Riassumendo, i dati che mi servono per calcolare  $Y(s)$  sono:

- l'ingresso:  $u(t) \quad t \in [0, +\infty)$
- le condizioni iniziali:  $y(0^-) \dots y^{(n-1)}(0^-) \quad u(0^-) \dots u^{(m-1)}(0^-)$

Apparentemente mi servono  $n+m$  condizioni iniziali, ma  $I(s)$  é un polinomio di grado massimo pari a  $\max(n, m) - 1$ , quindi costituito da  $\max(n, m)$  coefficienti (perché si esclude il coefficiente del termine di grado zero). Ne segue che ci sono  $\max(n, m)$  condizioni iniziali. Il modo in cui i coefficienti di  $I(s)$  dipendano da queste ultime é fissato dall'equazione differenziale. Il numero di coefficienti di  $I(s)$  determina i gradi di libertà di  $\frac{I(s)}{A(s)}$ .

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{B(s)}{A(s)}U(s) \right\} + \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{I(s)}{A(s)} \right\}$$

$$y_f(t) = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{B(s)}{A(s)}U(s) \right\} \quad \text{risposta forzata (risposta a condizioni iniziali nulle)}$$

$$y_l(t) = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{I(s)}{A(s)} \right\} \quad \text{risposta libera (risposta a ingresso nullo)}$$

$$Y(s) = \frac{B(s)}{A(s)}U(s) + \frac{I(s)}{A(s)} = Y_f(s) + Y_l(s)$$

### 5.1.1 Funzione di trasferimento

$$T(s) = \frac{\bar{B}(s)}{\bar{A}(s)} = \frac{\bar{B}(s) P(s)}{\bar{A}(s) P(s)}$$

Se fattorizzando  $A(s)$  e  $B(s)$  troviamo dei fattori comuni  $P(s)$ , cioè:

$$A(s) = \bar{A}(s) P(s) \quad B(s) = \bar{B}(s) P(s)$$

$\bar{A}(s)$  e  $\bar{B}(s)$  sono detti coprime perchè non hanno alcuno fattore in comune.

**Definizione 2.**  $T(s)$  é funzione di trasferimento **se e solo se** corrisponde al rapporto tra  $B(s)$  e  $A(s)$  dopo aver cancellato tutti i fattori comuni.

### 5.1.2 Risposta all'impulso

- le condizioni iniziali sono nulle ( $\Leftrightarrow I(s) = 0$ ) e quindi anche  $Y_l(s) = 0$
- $u(t) = \delta(t) \Rightarrow U(s) = 1$

$$Y_f(s) = T(s)U(s) = T(s)$$

$$y_f(t) = \mathcal{L}^{-1} \{T(s)\} = h(t) \quad \text{risposta forzata all'impulso}$$

Quindi otteniamo anche:

$$Y_f(s) = T(s)U(s) \xrightarrow{\mathcal{L}} y_f(t) = h(t) * u(t)$$



**Esempio circuito RC** L'equazione del circuito é:

$$\dot{y}(t) + \frac{1}{RC}y(t) = \frac{1}{RC}u(t)$$

Introduciamo l'operatore derivata:

$$(D + \frac{1}{RC})y(t) = \frac{1}{RC}u(t)$$

$$A(D) = D + \frac{1}{RC} \quad B(D) = \frac{1}{RC}$$

$$A(s) = s + \frac{1}{RC} \quad B(s) = \frac{1}{RC}$$

La funzione di trasferimento é:

$$T(s) = \frac{B(s)}{A(s)} = \frac{\frac{1}{RC}}{s + \frac{1}{RC}}$$

Trasformiamo l'equazione differenziale per ricavare  $I(s)$ :

$$sY(s) - y(0^-) + \frac{1}{RC}Y(s) = \frac{1}{RC}U(s)$$

$$Y(s) \underbrace{\left(s + \frac{1}{RC}\right)}_{A(s)} - \underbrace{y(0^-)}_{I_y(s)} = \underbrace{\frac{1}{RC}}_{B(s)} U(s) - \underbrace{0}_{I_u(s)}$$

Quindi abbiamo trovato che:

- $I_y(s)$  é un polinomio di primo grado perché  $y(t)$  compare derivato nell'equazione differenziale una sola volta ( $n = 1$ ).
- $I_u(s)$  é un polinomio di grado zero perché  $u(t)$  non é derivato ( $m = 1$ ).

Calcoliamo la risposta forzata e la risposta libera del sistema:

- $u(t) = \mathbf{1}(t)$  e condizioni iniziali nulle

$$U(s) = \frac{1}{s} \quad \Rightarrow \quad Y(s) = Y_f(s) = \frac{\frac{1}{RC}}{s(s + \frac{1}{RC})}$$

$$y(t) = y_f(t) = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{\frac{1}{RC}}{s(s + \frac{1}{RC})} \right\}$$

Si può calcolare attraverso i fratti semplici:

$$\frac{\frac{1}{RC}}{s(s + \frac{1}{RC})} = A \frac{1}{s} + B \frac{1}{s + \frac{1}{RC}} = \frac{(A+B)s + \frac{A}{RC}}{s(s + \frac{1}{RC})}$$

$$\begin{cases} A+B=0 \\ A=1 \end{cases} \quad \begin{cases} A=1 \\ B=-1 \end{cases}$$

$$y_f(t) = (1 - e^{-\frac{t}{RC}}) \cdot \mathbf{1}(t)$$

- $u(t) = 0$  e condizioni iniziali non nulle

$$Y_l(s) = \frac{I(s)}{A(s)} = \frac{y_0}{s + \frac{1}{RC}}$$

$$y_l(t) = y_0 e^{-\frac{t}{RC}} \cdot \mathbf{1}(t)$$

Poiché il sistema é lineare si puó applicare il principio di sovrapposizione degli effetti: somma di cause corrisponde una somma di effetti. Quindi se l'ingresso e le condizioni iniziali non sono nulle, in uscita si avrá la somma dell'uscita forzata e di quella libera:

$$Y(s) = Y_f(s) + Y_l(s) = \frac{\frac{1}{RC}}{s + \frac{1}{RC}} U(s) + \frac{y_0}{s + \frac{1}{RC}}$$

Inoltre é possibile applicare il teorema del valore finale perché i poli sono a  $\Re = 0$  con molteplicitá = 1 e a  $\Re < 0$

$$y_\infty = \lim_{s \rightarrow 0} sY(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s \cdot y_0 + \frac{1}{RC}}{s + \frac{1}{RC}} = \frac{\frac{1}{RC}}{\frac{1}{RC}} = 1$$

## 5.2 Sistemi propri e impropri

D'ora in poi supponiamo che  $S$  sia un sistema descritto dall'equazione 5.1:

$$A(D)y(t) = B(D)u(t) \quad \begin{cases} m = \deg\{B(D)\} \\ n = \deg\{A(D)\} \end{cases}$$

### 5.2.1 Sistema strettamente proprio $m < n$

**Funzione di trasferimento e risposta all'impulso**

$$T(s) = \frac{B(s)}{A(s)} = \frac{\bar{B}(s)P(s)}{\bar{A}(s)P(s)} \quad \bar{m} = \deg\{\bar{B}(s)\} < \bar{n} = \deg\{\bar{A}(s)\}$$

Allora abbiamo che:

- $T(s)$  é una funzione razionale strettamente propria
- $h(t)$  non contiene impulsi nell'origine. Quindi se sollecitiamo il sistema con un impulso, in uscita non avremo un impulso, ma una risposta piú "smooth".

**Risposta libera**

$$y_l(t) = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{I(s)}{A(s)} \right\} \quad \begin{cases} \deg\{I(s)\} \leq \max(n, m) - 1 = n - 1 \\ \deg\{A(s)\} = n \end{cases}$$

Anche la risposta libera non contiene impulsi, perché é l'antitrasformata di una funzione razionale strettamente propria.

### 5.2.2 Sistema semplicemente proprio $m = n$

**Risposta all'impulso**

$$h(t) = \mathcal{L}^{-1} \{T(s)\} = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{\bar{B}(s)}{\bar{A}(s)} \right\} =$$

faccio la divisione tra i polinomi di quella funzione propria:

$$= \mathcal{L}^{-1} \left\{ h_0 + \frac{\bar{B}'(s)}{\bar{A}(s)} \right\} =$$

Dalla divisione, proprio perché si trattava di una funzione razionale propria, abbiamo ottenuto un quoziente  $h_0$  e un resto  $\frac{\bar{B}'(s)}{\bar{A}(s)}$ , che é strettamente proprio.

$$= h_0 \delta(t) + \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{\bar{B}'(s)}{\bar{A}(s)} \right\}$$

## 5.2. SISTEMI PROPRI E IMPROPRI

Abbiamo ottenuto  $h_0\delta(t)$  che é un impulso nell'origine. Infatti da come si nota nella risposta forzata, a un impulso in ingresso corrisponde un impulso in uscita, perché c'è una dipendenza istantanea tra ingresso e uscita:

$$Y_f(s) = \underbrace{h_0 U(s)}_{\substack{\text{componente istantanea} \\ \text{che amplifica l'ingresso}}} + \frac{\bar{B}'(s)}{A(s)} U(s)$$

### Risposta libera

$$y_l(t) = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{I(s)}{A(s)} \right\} \quad \begin{cases} \partial \text{deg} \{I(s)\} \leq \max(n, m) - 1 = n - 1 \\ \partial \text{deg} \{A(s)\} = n \end{cases}$$

Non contiene nessun impulso perché é l'antitrasformata di un funzione razionale strettamente propria. Non avrebbe senso infatti che un sistema con ingresso nullo, restituisca improvvisamente un impulso in uscita.

### 5.2.3 Sistema improprio $m > n$

#### Risposta all'impulso

$$h(t) = \mathcal{L}^{-1} \{T(s)\} =$$

facciamo la divisione tra i polinomi

$$= \mathcal{L}^{-1} \left\{ h_{m-n} s^{m-n} + \dots + h_1 s + \frac{\bar{B}'(s)}{A(s)} \right\} =$$

$h_{m-n} s^{m-n} \neq 0$  perché la divisione deve restituire sicuramente un quoziente.

$\frac{\bar{B}'(s)}{A(s)}$  é strettamente propria, quindi la sua antitrasformata non contiene impulsi.

$$= h_{m-n} \delta^{(m-n)}(t) + \dots + h_1 \delta^{(1)}(t) + h_0 \delta(t) + \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{\bar{B}'(s)}{A(s)} \right\}$$

Se in ingresso ho un impulso, in uscita ottengo impulsi di ordine superiore a 0. Quindi se un impulso é fisicamente irrealizzabile (un'energia infinita concentrata in un intervallo di tempo infinitesimo), a maggior ragione gli impulsi di ordine superiore.

#### Risposta libera

$$y_l(t) = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{I(s)}{A(s)} \right\} \quad \begin{cases} \partial \text{deg} \{I(s)\} \leq \max(n, m) - 1 = m - 1 \geq n \\ \partial \text{deg} \{A(s)\} = n \end{cases}$$

L'antitrasformata di una funzione razionale impropria puó contenere impulsi o impulsi di ordine superiore nell'origine  $t = 0$  (come si vede facendo la divisione tra numeratore e denominatore).

Significa che il sistema, non sollecitato da nessun ingresso e sotto certe condizioni iniziali, produce in uscita un impulso nell'origine.

Un sistema improprio quindi **non é realizzabile** perché non é causale, in quanto l'uscita dipende dai valori futuri. Esempi di sistemi non causali sono:

- anticipatore  $y(t) = u(t + t_0)$   
l'uscita dipende dai valori dell'ingresso che ancora non sono applicati.
- derivatore  $y(t) = \frac{du(t)}{dt}$   
per poter fare la derivata dell'ingresso, oltre il limite sinistro  $u(0^-)$  (la condizione iniziale), bisogna conoscere anche il limite destro. Se i due limiti non coincidono, si ha una discontinuitá di tipo salto e quindi derivando si ottiene un impulso.

### 5.3 Stabilità dei sistemi realizzabili $m \leq n$

Dato un sistema descritto da un'equazione differenziale lineare a coefficienti costanti del tipo 5.1, si distinguono due tipi di stabilità:

- stabilità della  $y_l(t)$
- stabilità della  $y_f(t)$

#### 5.3.1 Stabilità della risposta libera

##### Definizione

Un sistema si dice **semplicemente stabile** nella risposta libera **se e solo se** qualsiasi condizione iniziale finita,  $y_l(t)$  è stabile, cioè limitata  $\forall t \geq 0$  (non diverge mai).

Se inoltre  $y_l(t) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 0$ , allora il sistema si dice **asintoticamente stabile**.

##### Condizioni

- Sistema **asintoticamente stabile** nella risposta libera se e solo se le radici di  $A(s)$  sono  $\Re < 0$  con qualsiasi molteplicità
- Sistema **semplicemente stabile** nella risposta libera se e solo se le radici di  $A(s)$  sono  $\Re < 0$  con qualsiasi molteplicità e  $\Re = 0$  con molteplicità 1.
- se si trova una radice di  $A(s)$  con  $\Re > 0$  con qualsiasi molteplicità o  $\Re = 0$  con molteplicità  $> 1$ , allora il sistema è **instabile** nella risposta libera.

**Esempi** La stabilità nella risposta libera si può trovare facilmente con la regola di Cartesio, se  $A(s)$  è un polinomio.

- $A(s) = s^2 + s + 1$   
Ho 2 permanenze quindi per la regola di Cartesio, ho 2 radici a parte reale negativa.  
 $\Rightarrow$  sistema asintoticamente stabile nella  $y_l(t)$ .
- $A(s) = s^2 - s + 1$   
Ho due variazioni di segno, quindi ho due radici a  $\Re > 0 \Rightarrow$  sistema instabile in  $y_l(t)$ .
- $A(s) = s^3 + s^2 + s = s(s^2 + s + 1)$   
sistema semplicemente stabile nella risposta libera, perché ho due radici a  $\Re < 0$  (due permanenze) e una radice in zero con molteplicità 1.
- $A(s) = s^4 + s^3 + s^2 = s^2(s^2 + s + 1)$   
Ho una radice a  $\Re = 0$  e molteplicità 2, due radici a  $\Re < 0$  (due permanenze)  $\Rightarrow$  il sistema è instabile nella risposta libera. Significa che avendo ingressi nulli e condizioni iniziali nulle, abbiamo un'uscita infinita  $\Rightarrow$  probabilmente fisicamente non esiste.

#### 5.3.2 Stabilità della risposta forzata

È detta anche **stabilità BIBO** (Bounded Input Bounded Output: ingresso limitato  $\Rightarrow$  uscita limitata). In questo caso non c'è distinzione tra stabilità semplice e asintotica, ma la stabilità BIBO ci può essere o non essere.

##### Definizione

Un sistema SISO (Single Input Single Output) è detto stabile nella risposta forzata se a qualsiasi ingresso limitato corrisponde una  $y_f(t)$  limitata.

**Condizioni**

Un sistema é stabile BIBO se e solo se  $\nexists$  poli di  $T(s)$  (radici del denominatore di  $T(s)$ ) a  $\Re \geq 0$ .

**Cenni dimostrazione**

Facciamo vedere con contro-esempi che se non rispettiamo le condizioni, il sistema non é stabile BIBO. Cioé troviamo degli ingressi limitati che fanno divergere l'uscita.

$\exists$  poli di  $T(s)$  a  $\Re > 0$ . Supponiamo:

$$T(s) = \frac{1}{s^2 - 1} = \frac{1}{(s + 1)(s - 1)} \quad \begin{cases} s_1 = -1 \\ s_2 = 1 \end{cases}$$

Poiché c'è un polo a  $\Re > 0$ , allora deve esistere sicuramente almeno un ingresso limitato che produca un'uscita illimitata.

- $u(t) = \mathbf{1}(t) \Rightarrow U(s) = \frac{1}{s}$

$$Y_f(s) = \frac{1}{(s + 1)(s - 1)} \cdot \frac{1}{s} = A \frac{1}{s + 1} + B \frac{1}{s - 1} + C \frac{1}{s}$$

dove  $A, B, C \neq 0$  perché i poli hanno molteplicità 1.

$$y_f(t) = (Ae^{-t} + \underbrace{Be^t}_{\text{diverge}} + C) \cdot \mathbf{1}(t)$$

- prendiamo come ingresso una funzione razionale strettamente propria, che quindi non contiene impulsi.

$$u(t) = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{s - 1}{(s + 2)^2} \right\} \quad s_1 = -2 \quad m_1 = 2 \rightarrow \text{ha antitrasformata limitata}$$

$$Y_f(s) = \frac{1}{(s + 1)(s - 1)} \frac{s - 1}{(s + 2)^2} \Rightarrow y_f(t) = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{(s + 1)(s + 2)^2} \right\}$$

Questo dimostra che non ci devono essere poli a  $\Re > 0$  per la stabilità:  $\exists$  poli di  $T(s)$  a  $\Re = 0$  con molteplicità 1.

Se in  $T(s)$  avessi un polo a  $\Re = 0$  con molteplicità 1, deve esistere almeno un ingresso limitato per cui l'uscita forzata é illimitata.

- 

$$T(s) = \frac{1}{s^2 + s} = \frac{1}{s(s + 1)} \quad \begin{cases} s_1 = 0 \\ s_2 = -1 \end{cases}$$

Prendo come  $U(s)$  una funzione strettamente propria (altrimenti avrei impulsi nell'origine che non sono limitati), limitata in t e che aumenti la molteplicità del polo a  $\Re = 0$  con molteplicità 1. Per esempio  $U(s) = \frac{1}{s}$ .

$$Y_f(s) = \frac{1}{s(s + 1)} \frac{1}{s} = \frac{1}{s^2(s + 1)}$$

$$y_f(t) = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s^2(s + 1)} \right\} = A \frac{1}{s} + B \frac{1}{s^2} + C \frac{1}{s + 1} = (A + \underbrace{Bt}_{\text{diverge}} + Ce^{-t}) \cdot \mathbf{1}(t)$$

dove  $B$  e  $C$  sono sicuramente  $\neq 0$ .

- 

$$T(s) = \frac{1}{s^2 + 4} \quad \begin{cases} s_1 = 2j \\ s_2 = -2j \end{cases}$$

Con questa funzione di trasferimento, il sistema è un oscillatore ideale con frequenza naturale di 2Hz. Modelliamo un ingresso oscillatorio:

$$u(t) = \sin wt \quad U(s) = \frac{w}{s^2 + w^2}$$

$$Y_f(s) = \frac{1}{s^2 + 4} \frac{w}{s^2 + w^2} = A \frac{2}{s^2 + 4} + B \frac{s}{s^2 + 4} + C \frac{s}{s^2 + w^2} + D \frac{w}{s^2 + w^2}$$

–  $w \neq 2$ :

abbiamo 4 radici reali distinte con  $\Re = 0$  e molt. = 1  $\Rightarrow$  l'uscita è limitata.

–  $w = 2$ :

abbiamo 2 radici a parte reale nulla con molteplicità 2, quindi l'uscita diverge:

$$Y_f(s) = A \frac{2}{s^2 + 4} + B \frac{s}{s^2 + 4} + C \frac{4s}{(s^2 + w^2)^2} + D \frac{s^2 - 4}{(s^2 + w^2)^2} =$$

$$y_f(t) = (A \sin 2t + B \cos 2t + Ct \sin 2t + Dt \cos 2t) \cdot \mathbf{1}(t)$$

Questo viene detto fenomeno di **risonanza**: se mettiamo come ingresso una funzione oscillatoria con frequenza la frequenza di risonanza del sistema, allora l'uscita forzata diverge.

### 5.3.3 Relazioni tra i due tipi di stabilità

Stabilità asintotica  $y_l(t)$  (cioè le radici di  $A(s)$  sono a  $\Re < 0$ )  $\Rightarrow$  stabilità BIBO.

**Dualità:**

Sistema non BIBO (ci sono poli di  $T(s)$  a  $\Re \geq 0$ )  $\Rightarrow$  non stabilità asintotica  $y_l$ .

## 5.4 Rappresentazione dei sistemi lineari 1

Un sistema SISO pu essere rappresentato in due modi:

1. con un'equazione lineare a coefficienti costanti (vedi 5.1).
2. con la funzione di trasferimento  $T(s) = \frac{\bar{B}(s)P(s)}{\bar{A}(s)P(s)}$ .

Dall'equazione differenziale si ottiene univocamente una funzione di trasferimento. Il passaggio inverso non è univoco perché possiamo introdurre un polinomio  $P(s)$  arbitrario.

### Esempio

$$T(s) = \frac{1}{s+1} \quad \frac{\bar{B}(s)}{\bar{A}(s)} = \frac{1}{s+1}$$

Ma se considero i polinomi  $A(s)$  e  $B(s)$  prima della semplificazione dei fattori comuni:

$$\frac{B(s)}{A(s)} = \frac{1 \cdot P(s)}{(s+1)P(s)} \quad \forall P(s)$$

- $P(s) = s$

$$\frac{B(s)}{A(s)} = \frac{s}{s^2 + s} \quad \Rightarrow \quad \ddot{y}(t) + \dot{y}(t) = \dot{u}(t)$$

- $P(s) = s - 1$

$$\frac{B(s)}{A(s)} = \frac{s-1}{s^2-1} \quad \Rightarrow \quad \ddot{y}(t) - y(t) = \dot{u}(t) - u(t)$$

- $P(s) = 1$  scelta *standard*

$$\frac{B(s) = 1}{A(s) = s + 1} \Rightarrow \dot{y}(t) + y(t) = u(t)$$

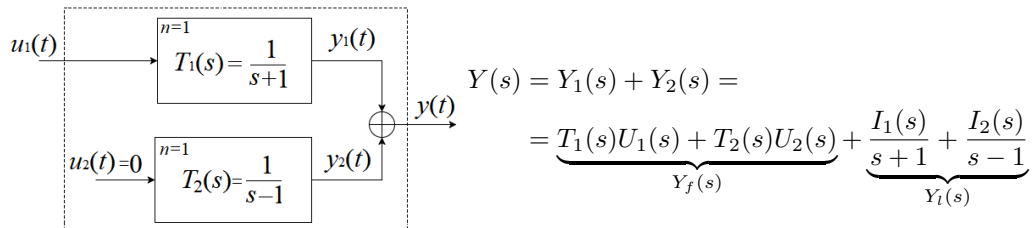
- $P(s) = 3$  basta dividere per la costante e si ottiene l'equazione differenziale cercata

$$\frac{B(s) = 3}{A(s) = 3s + 3} \Rightarrow 3\dot{y}(t) + 3y(t) = 3u(t) \Rightarrow \dot{y}(t) + y(t) = u(t)$$

Quindi la rappresentazione di un sistema con l'equazione differenziale é piú completa perché univoca, mentre l'altra introduce arbitrarietà. Il passaggio da  $T(s)$  a equazione differenziale é univoco se e solo se é anche specificato l'ordine  $n = \bar{n}$  ( $\bar{n} = \text{deg} \{ \bar{A}(s) \}$ ) del sistema.

É prassi comune descrivere sistemi dinamici attraverso la funzione di trasferimento  $T(s)$ . (é lecito se non ci sono parti nascoste). Se non é scontato che non esistano parti nascoste, allora  $T(s)$  dá informazioni solo riguardo la risposta forzata, ma nulla della risposta libera. É pericoloso se la parte nascosta non é stabile.

**Esempio** supponiamo di avere il seguente sistema di cui ci danno la funzione di trasferimento  $T(s) = \frac{1}{s+1}$ , mentre il sistema 2 é nascosto:



Poiché  $U_2(s) = 0 \Rightarrow Y(s) = Y_f(s) = T_1(s)U_1(s)$ :

- La risposta forzata é stabile per qualunque ingresso, perché l'unico polo é a  $\Re < 0$ .
- La risposta libera ha un polo  $s = 1$  ( $\Re > 0$ ), quindi é instabile se le condizioni iniziali non sono nulle  $I_2(s) \neq 0$ .

In conclusione la funzione di trasferimento fornita non ci dá alcuna informazione sulla parte nascosta.

## 5.5 Risposte al gradino di sistemi di ordine 1 e 2

- studiamo questa categoria perché sono approssimazioni diffuse di sistemi reali.
- spesso cercheremo di ricondurci (attraverso controlli) a sistemi di questo tipo, perché li sappiamo rappresentare molto bene e interpretare facilmente.

Studiamo solo la risposta forzata, perché se questa diverge, allora anche la risposta libera divergerà. (se non é stabile BIBO, allora non é neppure stabile nella  $y_t$ ).

## 5.6 Sistemi di ordine 1

La funzione di trasferimento di un sistema del 1 ordine strettamente proprio é:

$$T(s) = \frac{b_0}{s + a_0}$$

Se il sistema fosse semplicemente proprio, possiamo ricondurci al caso strettamente proprio.

Dividiamo numeratore con denominatore:

$$\tilde{T}(s) = \frac{\tilde{a}_1 s + \tilde{b}_0}{s + \tilde{a}_0} = \tilde{b}_1 + \frac{\tilde{b}_0 - \tilde{b}_1 \tilde{a}_0}{s + \tilde{a}_0}$$

$$Y_f(s) = \underbrace{\tilde{b}_1 U(s)}_{\substack{\text{copia amplificata} \\ \text{dell'ingresso}}} + \tilde{T}'(s) U(s)$$

Troviamo la funzione resto  $\tilde{T}'(s)$  che é strettamente propria. Quindi possiamo concentrarci solo sul caso di sistema strettamente proprio.

La radice del denominatore é  $s_1 = -a_0$ :

- $a_0 \leq 0 \Rightarrow$  instabile BIBO.  
In particolare se  $a_0 < 0$ , la risposta forzata avrà andamento esponenziale nel tempo. Se  $a_0 = 0$ , la risposta forzata evolve come una retta.  
In entrambi i casi diverge.
- $a_0 > 0 \Rightarrow$  stabile BIBO.

Concentriamoci solo sul caso della risposta stabile.

$$T(s) = \frac{b_0}{s + a_0} = \frac{\frac{b_0}{a_0}}{1 + \frac{1}{a_0}s} = \frac{k}{1 + s\tau}$$

$k = \frac{b_0}{a_0}$  guadagno statico  
 $\tau = \frac{1}{a_0}$  costante di tempo

### 5.6.1 Risposta al gradino

Supponiamo che l'ingresso sia un gradino  $u(t) = \mathbf{1}(t)$ . Calcoliamo la  $y_f(t)$ :

$$y_f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{Y_f(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s} \frac{b_0}{s + a_0}\right\} \quad Y_f(s) = \frac{b_0}{s(s + a_0)} = A \frac{1}{s} + B \frac{1}{s + a_0}$$

$$A = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{b_0}{s(s + a_0)} = \frac{b_0}{a_0} = k$$

$$B = \lim_{s \rightarrow -a_0} (s + a_0) \frac{b_0}{s(s + a_0)} = -\frac{b_0}{a_0} = -k$$

$$\Rightarrow y_f(t) = k(1 - e^{-ta_0}) = k(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}) \cdot \mathbf{1}(t)$$

Studiamo la risposta forzata:

- valore iniziale:

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} y_f(t) = 0 \Rightarrow y_f(0^+) = 0$$

- valore iniziale della derivata, usiamo il teorema del valore iniziale:

$$\dot{y}_f(0^+) = \lim_{s \rightarrow +\infty} s \cdot \mathcal{L}^{-1}\{\dot{y}_f(t)\} = \lim_{s \rightarrow +\infty} \frac{sb_0}{s + a_0} = b_0 = \frac{k}{\tau}$$

oppure

$$\dot{y}_f(0^+) = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{k}{\tau} e^{-\frac{t}{\tau}} = \frac{k}{\tau}$$

$\tau$  può essere interpretata come il tempo che impiegherebbe  $y_f(t)$  ad arrivare al suo valore di regime se continuasse con pendenza come in  $t = 0^+$ .

- valore di regime, con il teorema del valore finale:

$$y_f(\infty) = \lim_{t \rightarrow \infty} y_f(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s Y_f(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{b_0}{s + a_0} = \frac{b_0}{a_0} = k$$

oppure

$$y_f(\infty) = \lim_{t \rightarrow \infty} k(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}) \cdot \mathbf{1}(t) = k$$



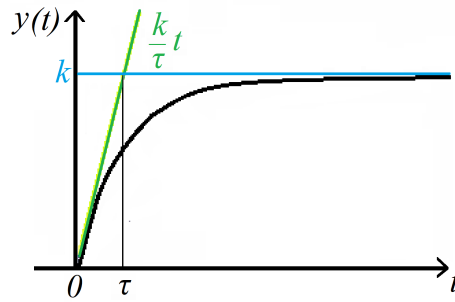


Figura 5.2: Grafico della risposta al gradino di un sistema di ordine 1.

### Tempo di assestamento

Definiamo intanto:

$$T_a = \inf \{ \bar{t} : |y_f(t) - y_f(\infty)| \leq 0.05 \cdot y_f(\infty) \quad \forall t > \bar{t} \}$$

In questa categoria di sistemi si può verificare facilmente che:  $T_a \cong 3\tau$ .

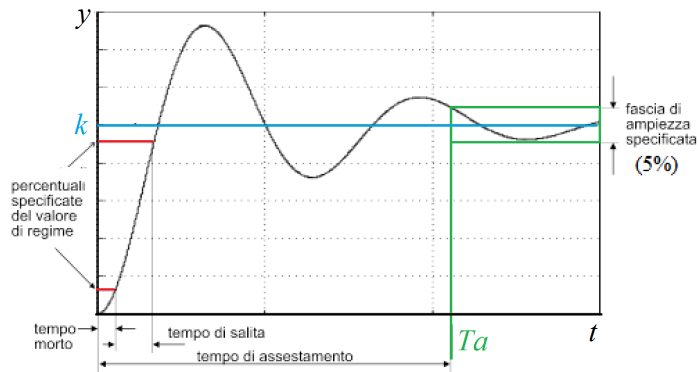


Figura 5.3: Tempo di assestamento ed altri parametri.

## 5.7 Sistemi di ordine 2

$$T(s) = \frac{b_0}{s^2 + a_1 s + a_0}$$

$a_0 > 0$  è condizione necessaria per avere:

- stabilità asintotica e BIBO. Infatti:
  - se  $a_0 = 0$  avrei almeno una radice in zero.
  - se  $a_0 < 0$  avrei sicuramente una variazione di segno (v. regola di Cartesio) e quindi una radice a  $\Re > 0$ .
- poli complessi coniugati.

Riscriviamo la funzione di trasferimento raccogliendo  $a_0$  a numeratore e a denominatore:

$$T(s) = \frac{\frac{b_0}{a_0}}{1 + \frac{a_1}{a_0}s + \frac{s^2}{a_0}} = \frac{k}{1 + 2\frac{\xi}{w_0}s + \frac{1}{w_0^2}s^2} \quad \begin{cases} k = \frac{b_0}{a_0} & \text{guadagno statico} \\ w_0 = \sqrt{a_0} & \text{pulsazione naturale} \\ \xi = \frac{a_1}{2\sqrt{a_0}} & \text{coefficiente di smorzamento} \end{cases}$$

I poli di  $T(s)$  sono:

$$p_{1,2} = w_0(-\xi \pm \sqrt{\xi^2 - 1})$$

Studiamo i poli per  $\xi \geq 0$ :

- $\xi = 0$   $p_{1,2} = \pm w_0 \sqrt{-1} = \pm j w_0$  radici puramente immaginarie
- $0 < \xi < 1$  due radici complesse coniugate con  $\Re = -w_0 \xi$  e  $\Im = \pm w_0 \sqrt{1 - \xi^2}$

$$|p_{1,2}| = \sqrt{\Re^2 + \Im^2} = \sqrt{w_0^2 \xi^2 + w_0^2 (1 - \xi^2)} = \sqrt{w_0^2} = w_0$$

cioé le radici si trovano su una semi circonferenza (solo parte sinistra) centrata nell'origine e di raggio  $w_0$ .

- $\xi = 1$   $p_{1,2} = -w_0$   $molt = 2$  due radici reali coincidenti
- $\xi > 1$  otteniamo due radici reali

Studiamo i poli per  $\xi < 0$ :

- troviamo una situazione simmetrica in cui le radici hanno tutte  $\Re > 0$ .

Quindi ricaviamo che  $\xi > 0$  é **condizione necessaria e sufficiente** per la stabilità BIBO.

### 5.7.1 Risposta al gradino

Analizziamo la risposta forzata del sistema al variare di  $\xi$ :

♠  $\xi < 0$

La risposta forzata diverge.

♠  $\xi = 0$

$$Y_f(s) = \frac{k w_0^2}{s(s^2 + w_0^2)} = \frac{A}{s} + B \frac{w_0}{s^2 + w_0^2} + C \frac{s}{s^2 + w_0^2} \quad \begin{cases} A = k \\ B = 0 \\ C = -k \end{cases}$$

In uscita otteniamo una cosinusoide non smorzata:

$$y_f(t) = k(1 - \cos(w_0 t)) \cdot \mathbf{1}(t)$$

♠  $0 < \xi < 1$

$$y_f(t) = k \left[ 1 - \frac{e^{-w_0 \xi t}}{\sqrt{1 - \xi^2}} \sin \left( w_0 \sqrt{1 - \xi^2} \cdot t + \arctan \frac{\sqrt{1 - \xi^2}}{\xi} \right) \right] \cdot \mathbf{1}(t)$$

Applichiamo il teorema del valore iniziale:

$$y_f(0^+) = \lim_{t \rightarrow 0^+} = \lim_{s \rightarrow \infty} s Y_f(s) = \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{k}{1 + 2 \frac{\xi}{w_0} s + \frac{1}{w_0^2} s^2} = 0$$

$$\dot{y}_f(0^+) = \lim_{s \rightarrow \infty} s [s Y_f(s) - y_f(0^+)] = \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{k s}{1 + 2 \frac{\xi}{w_0} s + \frac{1}{w_0^2} s^2} = 0$$

cioé parte con pendenza nulla dall'origine.

Vediamo come dipende la risposta forzata dai coefficienti  $\xi$  e  $w_0$ :

- $w_0$  fissato:  
se  $\xi$  é piccolo le oscillazioni si smorzano lentamente.
- $\xi$  fissato:  
se  $w_0$  é grande, la frequenza aumenta e il grafico risulta piú schiacciato verso l'asse y.

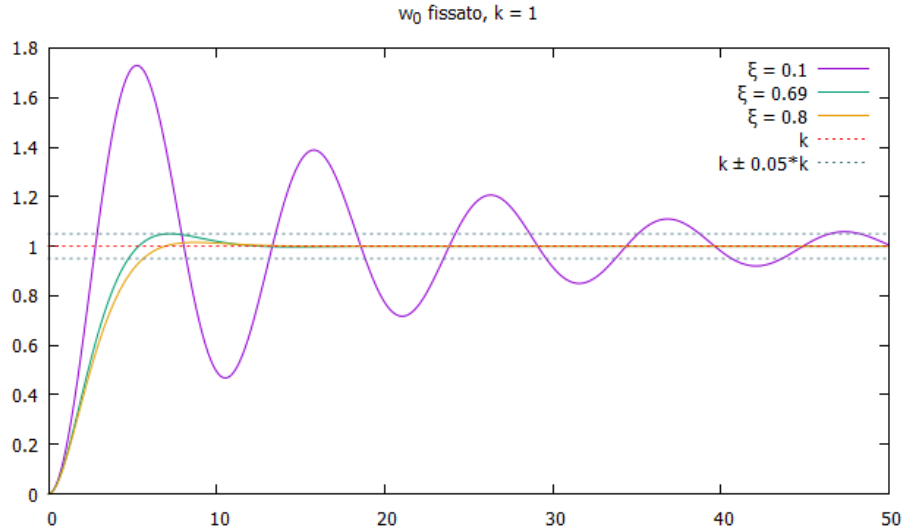


Figura 5.4: Grafico della risposta forzata nel tempo al variare di  $\xi$ , con  $w_0$  fissato.

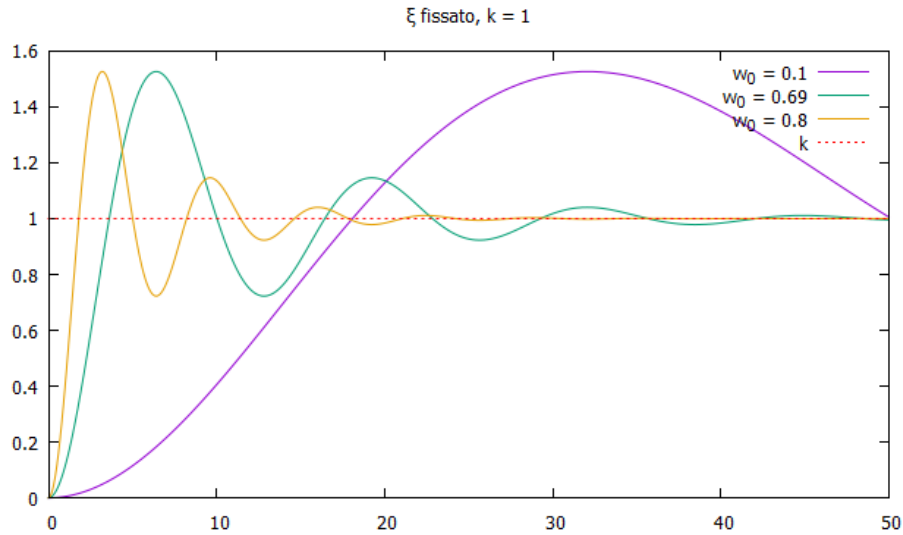
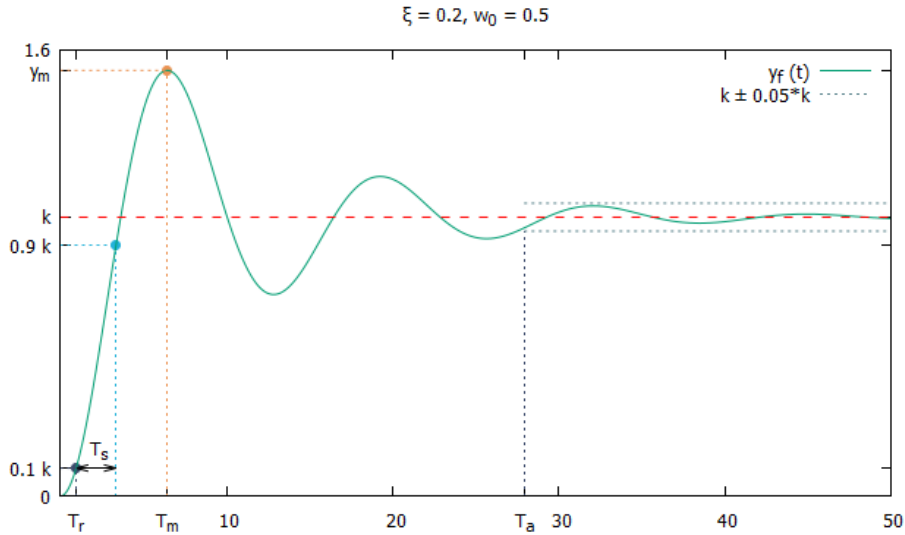


Figura 5.5: Grafico della risposta forzata nel tempo al variare di  $w_0$ , con  $\xi$  fissato.

**Parametri**

- $y_m - k$  sovra-elongazione massima.
- $S_m = \frac{y_m - k}{k} = e^{-\frac{\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}}$  sovra-elongazione massima relativa.  
Si può ricavare che se  $\xi > 0.69$ , la curva entra nel 5% del valore di regime e non ne esce più.
- $T_r$  tempo di ritardo:  
tempo che impiega la curva ad arrivare al 10% del valore di regime.
- $T_s$  tempo di salita:  
tempo che impiega la curva per passare dal 10% al 90% del valore di regime.
- $T_m = \frac{\pi}{w_0\sqrt{1-\xi^2}}$  tempo di sovra-elongazione massima.
- $T_a$  tempo di assestamento.  
Se  $\xi \leq 0.69$  allora  $T_a \cong \frac{3}{w_0\xi}$ .  
Se volessi un sistema di ordine 2 con  $T_a \leq \bar{t}$ , dovrei imporre  $\underbrace{-w_0\xi}_{\Re\{p_{1,2}\}} \leq -\frac{3}{\bar{t}}$ .



♠  $\xi \geq 1$

I poli sono entrambi reali e negativi:

$$T(s) = \frac{k}{1 + 2\frac{\xi}{w_0}s + \frac{1}{w_0^2}s^2} = \frac{k}{(1 + s\tau_1)(1 + s\tau_2)}$$

$$p_1 = -\frac{1}{\tau_1} \quad p_2 = -\frac{1}{\tau_2}$$

- $\xi = 1 \Rightarrow \tau_1 = \tau_2$  otteniamo 2 poli coincidenti:  $p = -\frac{1}{\tau} \quad m = 2$

$$Y_f(s) = A\frac{1}{s} + B\frac{1}{s + \frac{1}{\tau}} + C\frac{1}{(s + \frac{1}{\tau})^2}$$

$$y_f(t) = \left[ A + Be^{-\frac{t}{\tau}} + Cte^{-\frac{t}{\tau}} \right] \cdot \mathbf{1}(t)$$

- $\xi > 1$

$$Y_f(s) = A\frac{1}{s} + B\frac{1}{s + \frac{1}{\tau_1}} + C\frac{1}{s + \frac{1}{\tau_2}}$$

$$y_f(t) = \left[ A + Be^{-\frac{t}{\tau_1}} + Ce^{-\frac{t}{\tau_2}} \right] \cdot \mathbf{1}(t)$$

Nel complesso il sistema si comporta quasi come un sistema del 1 ordine.

Osservazioni:

- non esistono sovra elongazioni: la derivata é nulla solo nell'origine
- $T_a$  dipende fortemente dal polo piú "lento" (quello con  $\tau$  piú grande):

$$\frac{\tau_1}{\tau_2} \ll 1 \Rightarrow T_a \cong 3\tau_2$$

$$\frac{\tau_1}{\tau_2} = 0.2 \Rightarrow T_a \cong 3.22\tau_2$$

$$\frac{\tau_1}{\tau_2} = 0.5 \Rightarrow T_a \cong 3.68\tau_2$$

$$\frac{\tau_1}{\tau_2} = 1 \Rightarrow T_a \cong 4.75\tau_2$$

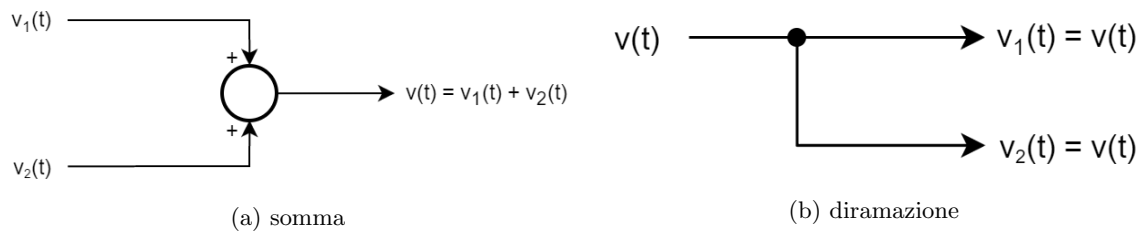
Spesso si usa il valore *conservativo*:  $T_a < 5\tau_2$

# Capitolo 6

## Algebra dei blocchi

### 6.1 Connessioni

Le possibili connessioni tra i sistemi sono:



### 6.2 Connessioni equivalenti

Sono utili **solo** per trovare la funzione di trasferimento totale di un sistema nell'algebra dei blocchi. Non possono essere usate per studiare complessivamente un sistema, perché non tengono conto delle condizioni iniziali e quindi delle risposte libere dei sistemi.

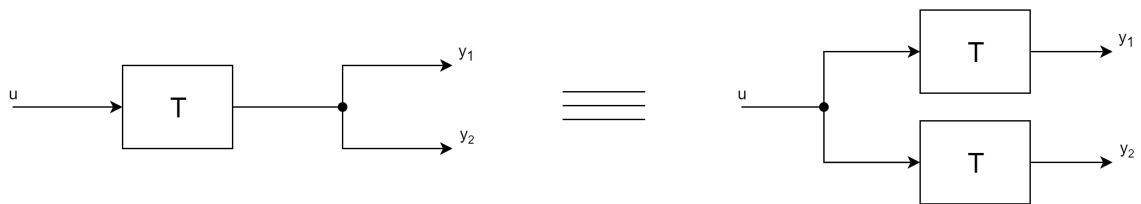


Figura 6.2: Spostamento diramazione a monte di un blocco

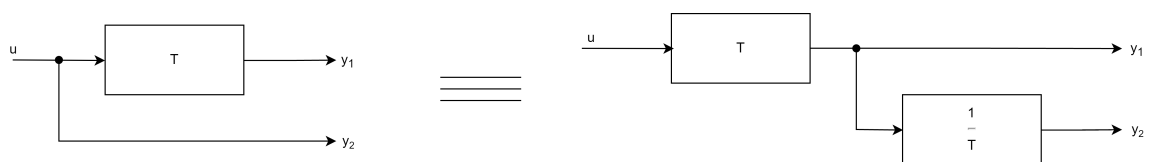


Figura 6.3: Spostamento diramazione a valle di un blocco

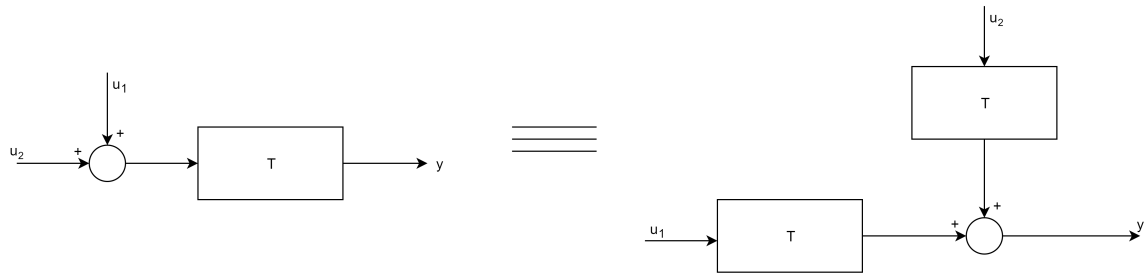


Figura 6.4: Spostamento nodo sommatore a valle di un blocco

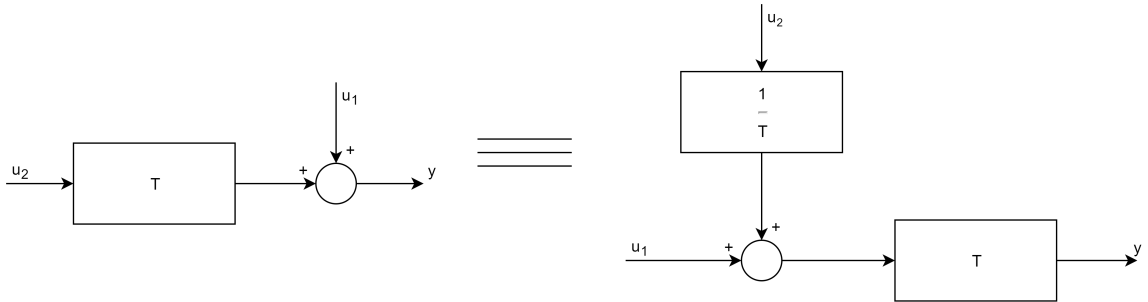


Figura 6.5: Spostamento nodo sommatore a monte di un blocco

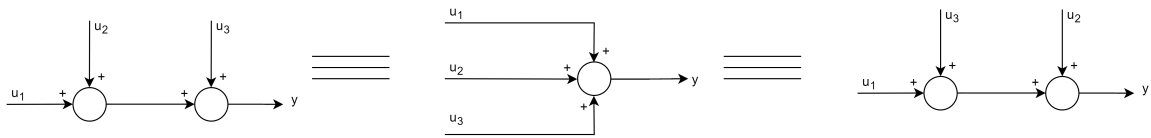


Figura 6.6: Accumulo e scambio di nodi sommatore

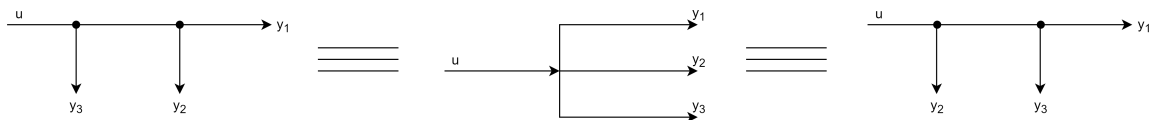


Figura 6.7: Accumulo e scambio di nodi di diramazione

### 6.3 Algebra dei blocchi

L'algebra dei blocchi permette di calcolare la funzione di trasferimento  $T(s)$  totale di un sistema costituito dall'interconnessione di più sistemi.

Solitamente la risposta forzata di un generico sistema MIMO é:  $y = T\underline{u}$ . L'algebra dei blocchi consiste nel considerare tutte le variabili in gioco ( $y, T, \underline{u}$ ) come scalari e operare su di essi come se fossero quantità scalari. Grazie a passaggi algebrici classici, quindi si può ottenere facilmente la funzione di trasferimento totale.

### 6.4 Risposta forzata di sistemi interconnessi

La connessione tra più sistemi produce un nuovo sistema caratterizzato da:

- ingressi:  $\underline{u}(t) = \begin{bmatrix} u_1(t) \\ \vdots \\ u_{n_u}(t) \end{bmatrix}$

- uscite:  $\underline{y}(t) = \begin{bmatrix} y_1(t) \\ \vdots \\ y_{n_y}(t) \end{bmatrix}$
- $T_{ij}(s) = T_{y_i u_j}(s)$  funzione di trasferimento tra l'ingresso  $u_j$  e l'uscita  $y_i$

Quindi un sistema MIMO non sarà caratterizzato da una sola funzione di trasferimento, ma da una **matrice di trasferimento**:

$$T(s) = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} & \dots & T_{1n_u} \\ T_{21} & T_{22} & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ T_{n_y 1} & T_{n_y 2} & \dots & T_{n_y n_u} \end{bmatrix}$$

Questa matrice ha:

- tante righe quante le uscite.
- tante colonne quante gli ingressi.

Quindi la risposta forzata del sistema si ottiene moltiplicando la matrice di trasferimento con il vettore colonna degli ingressi:

$$\begin{bmatrix} y_1(t) \\ \vdots \\ y_{n_y}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} & \dots & T_{1n_u} \\ T_{21} & T_{22} & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ T_{n_y 1} & T_{n_y 2} & \dots & T_{n_y n_u} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1(t) \\ \vdots \\ u_{n_u}(t) \end{bmatrix}$$

### 6.4.1 Stabilità BIBO

**Definizione 3.** Un sistema è stabile BIBO se e solo se qualsiasi ingresso limitato, allora l'uscita forzata  $y_f(t)$  è limitata.  $y_f(t)$  è un vettore che ha come elementi  $y_{f,1}(t), y_{f,2}(t), \dots, y_{f,n_y}(t)$ , quindi affinché sia stabile, tutte le componenti devono essere limitate.

**Condizioni** Nessuno elemento della matrice di trasferimento  $T(s)$ , deve avere poli (radici del denominatore) a  $\Re \geq 0$ .

#### Esempio

$$T(s) = \begin{bmatrix} \frac{1}{s+1} & \frac{1}{s} \\ 0 & \frac{1}{(s+1)^2} \end{bmatrix}$$

Non è stabile BIBO perché la componente  $T_{12}(s)$  ha un polo a  $\Re = 0$ . Infatti se poniamo un ingresso limitato:  $\underline{u}(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{1}(t) \end{bmatrix}$  otteniamo un'uscita illimitata:

$$Y_f(s) = \begin{bmatrix} \frac{1}{s+1} & \frac{1}{s} \\ 0 & \frac{1}{(s+1)^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{s} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{s^2} \\ \frac{1}{s(s+1)^2} \end{bmatrix}$$

- $\frac{1}{s^2}$  nel tempo corrisponde a una rampa (illimitata);

- $\frac{1}{s(s+1)^2}$  nel tempo corrisponde a un gradino e a un esponenziale decrescente (limitata).

## 6.5 Interconnessione di sistemi SISO

Dati due sistemi:

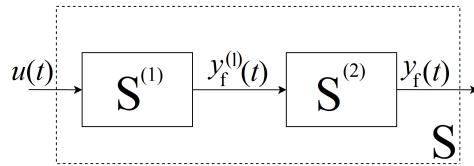
- $S^{(1)}$ :  $Y_f^{(1)}(s) = T^{(1)}(s)U^{(1)}(s)$
- $S^{(2)}$ :  $Y_f^{(2)}(s) = T^{(2)}(s)U^{(2)}(s)$

### 6.5.1 Serie

$$Y_f(s) = T^{(2)}(s)U^{(2)}(s) = T^{(2)}(s)T^{(1)}(s)U(s)$$

La funzione di trasferimento del sistema complessivo é:

$$T(s) = T^{(2)}(s)T^{(1)}(s)$$



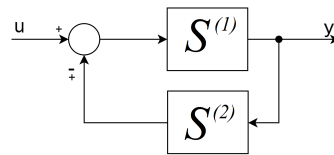
(NB: l'ordine di questo prodotto vale anche per i sistemi MIMO che sono descritti con matrici)

### 6.5.2 Parallelo

$$Y_f(s) = T^{(1)}(s)U^{(1)}(s) + T^{(2)}(s)U^{(2)}(s) = [T^{(1)}(s) + T^{(2)}(s)]$$

$$T(s) = T^{(1)}(s) + T^{(2)}(s)$$

### 6.5.3 Retroazione (feedback)



$$y = T^{(1)}(s)e = T^{(1)}(s)(u - v) = T^{(1)}(s)[u - T^{(2)}(s)y] = T^{(1)}(s)u - T^{(1)}(s)T^{(2)}(s)y$$

$$[1 + T^{(1)}(s)T^{(2)}(s)] y = T^{(1)}(s)u$$

- $T^{(1)}(s)$  funzione di trasferimento in catena diretta
- $T^{(2)}(s)$  funzione di trasferimento in catena inversa

In generale sia che  $v$  venga sottratto o sommato:

$$T(s) = \frac{T^{(1)}(s)}{1 \pm T^{(1)}(s)T^{(2)}(s)}$$

o, ancora pi in generale:

$$T(s) = \frac{\text{catena diretta}}{1 \pm \text{anello}}$$

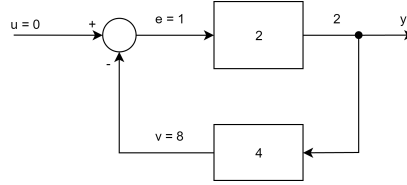
con il segno a denominatore opposto rispetto a quello che troviamo nel nodo sommatore.



### Loop algebrici

Se tutte le funzioni di trasferimento sono semplicemente proprie, allora si forma un **loop algebrico**, che rende irrealizzabile la retroazione.

**Esempio** Entrambe le funzioni di trasferimento sono amplificatori e  $u(t) = 0$ ,  $e(t) = 1$ .



Sostituendo i valori e percorrendo la retroazione troveremo che  $e$  dovrebbe valere contemporaneamente 1 e  $-8$ . Infatti  $y$  dipende istantaneamente da  $e$ ,  $v$  d. i. da  $y$ , e d. i. da  $v$ , quindi otteniamo che  $e$  dipende istantaneamente da sé stessa, ovvero c'è un loop algebrico.

**Esempio** È possibile trovare  $k$  per avere un sistema stabile BIBO?

Notiamo subito che non ci sono loop algebrici perché non tutte le funzioni di trasferimento sono semplicemente proprie. Pertanto la funzione di trasferimento è:

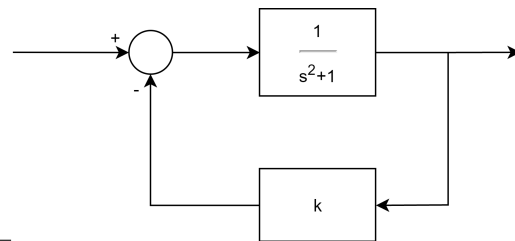
$$T(s) = \frac{1}{1 + \frac{k}{s^2 + 1}} = \frac{1}{\frac{s^2 + 1 + k}{s^2 + 1}} = \frac{1}{s^2 + 1 + k}$$

$$s^2 = -(k + 1)$$

Affinché il sistema sia stabile BIBO, non ci devono essere radici a  $\Re \geq 0$

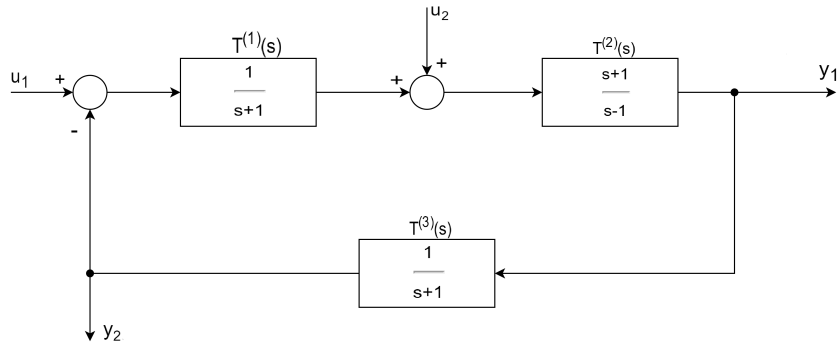
- $k < -1 \Rightarrow s_{1,2} = \pm \sqrt{-(k+1)}$
- $k > -1 \Rightarrow s_{1,2} = \pm j\sqrt{k+1}$
- $k = -1 \Rightarrow s_{1,2} = 0$

Non esiste alcun  $k$  per cui il sistema sia stabile BIBO.



## 6.6 Esercizi

\*\*\* **Esercizio 5** Calcolare tutte le funzioni di trasferimento



- $T_{y_1 u_1}(s)$ : poniamo  $u_2 = 0$ .

Serie tra  $T^{(1)}$  e  $T^{(2)}$ :

$$T_{serie} = T^{(1)}T^{(2)} = \frac{s+1}{s-1} \frac{1}{s+1} = \frac{1}{s-1}$$

Retroazione tra  $T_{serie}$  e  $T^{(3)}$ :

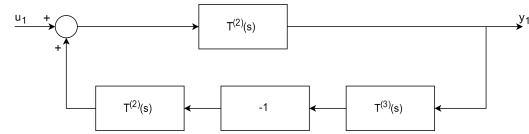
$$T_{y_1 u_1}(s) = \frac{T_{serie}}{1 + T_{serie}T^{(3)}} = \frac{\frac{1}{s-1}}{1 + \frac{1}{(s+1)(s-1)}} = \frac{1}{s-1} \frac{s+1}{s^2-1+1} = \frac{s+1}{s^2}$$

Questa funzione di trasferimento é instabile BIBO perché c'è un polo a  $\Re = 0$ .

- $T_{y_1 u_2}(s)$ : poniamo  $u_1 = 0$ .

Calcoliamo la serie nella catena inversa di retroazione:

$$T_{serie}(s) = \frac{-1}{(s+1)^2}$$



Retroazione:

$$T_{y_1 u_2}(s) = \frac{\frac{s+1}{s-1}}{1 - \frac{s+1}{s-1} \frac{-1}{(s+1)^2}} = \frac{\frac{s+1}{s-1}}{1 + \frac{1}{(s+1)(s-1)}} = \frac{s+1}{s-1} \frac{s+1}{s^2} = \frac{(s+1)^2}{s^2}$$

Questa funzione di trasferimento é instabile BIBO perché c'è un polo a  $\Re = 0$ . Abbiamo ottenuto una funzione di trasferimento semplicemente propria perché tra  $u_2$  e  $y_1$  in catena diretta c'è una dipendenza istantanea (dato dalla costante):

$$T^{(2)}(s) = \frac{s+1}{s-1} = 1 + \frac{2}{s-1}$$

- $T_{y_2 u_1}(s)$ :

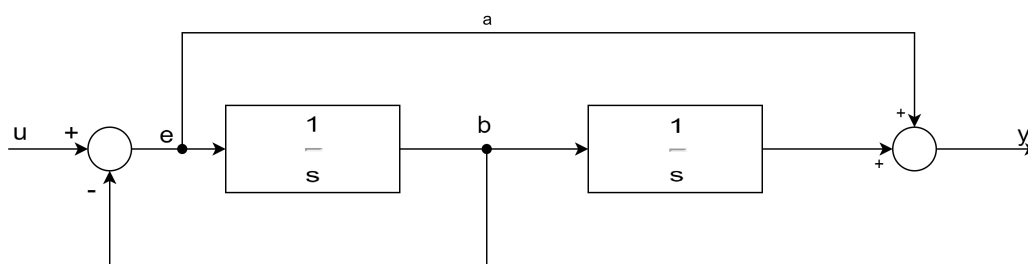
$$T_{y_2 u_1}(s) = \frac{\frac{1}{s+1} \frac{s+1}{s-1} \frac{1}{s+1}}{(s+1)(s-1)} = \frac{1}{s^2}$$

- $T_{y_2 u_2}(s)$ :

$$T_{y_2 u_2}(s) = \frac{\frac{1}{s+1} \frac{s+1}{s-1}}{(s+1)(s-1)} = \frac{s+1}{s^2}$$

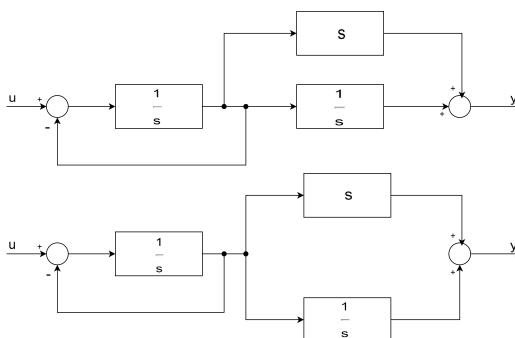
**\*\* Esercizio 6    Calcolare la funzione di trasferimento**

Calcolare la funzione di trasferimento del sistema in figura:



Spostiamo il nodo  $e$  e otteniamo un nuovo sistema composto da una retroazione e da un parallelo.

L'algebra dei blocchi permette di fare queste equivalenze solo per il calcolo della funzione di trasferimento complessiva e non per altri calcoli, perché stiamo introducendo nuovi blocchi, tra cui alcuni irrealizzabili (vedi il blocco di funzione di trasferimento  $s$ ).



$$T_{yu}(s) = \frac{\frac{1}{s}}{1 + \frac{1}{s}} \left( s + \frac{1}{s} \right) = \frac{1}{s+1} \frac{s^2+1}{s} = \frac{s^2+1}{s(s+1)}$$

# Capitolo 7

## Equazione di stato

### 7.1 Equazione di stato

Abbiamo visto che i sistemi MIMO possono essere rappresentati attraverso un sistema di equazioni differenziali o in forma matriciale.

L'equazione di stato é una rappresentazione dei sistemi dinamici (non necessariamente lineare) che mette in relazione ingressi e uscite sfruttando una quantità (interna al sistema) detta *stato del sistema*.

Lo stato  $\underline{x}(t)$  rappresenta una *foto istantanea* di  $S$  e deve descriverne completamente la situazione. Per determinare  $\underline{x}(t)$  per  $t \geq t_0$  saranno sufficienti  $\underline{x}(t_0^-)$  e  $\underline{u}(\tau)$  per  $\tau \geq t_0$ .

$$\underline{y}(t) = \begin{bmatrix} y_1(t) \\ \vdots \\ y_{n_y}(t) \end{bmatrix} \quad \underline{u}(t) = \begin{bmatrix} u_1(t) \\ \vdots \\ u_{n_u}(t) \end{bmatrix} \quad \underline{x}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_{n_x}(t) \end{bmatrix}$$

$n_y = \dim(\underline{y}(t)) \quad n_u = \dim(\underline{u}(t)) \quad n_x = \dim(\underline{x}(t))$

Le equazioni per descrivere il sistema in notazione matriciale saranno:

$$\begin{aligned} \dot{\underline{x}}(t) &= A\underline{x}(t) + B\underline{u}(t) \\ \underline{y}(t) &= C\underline{x}(t) + D\underline{u}(t) \end{aligned}$$

dove le dimensioni delle matrici sono:

$$A \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x} \quad B \in \mathbb{R}^{n_x \times n_u} \quad C \in \mathbb{R}^{n_y \times n_x} \quad D \in \mathbb{R}^{n_y \times n_u}$$

Si nota dalla seconda equazione che il vettore delle uscite dipende istantaneamente dalla stato ( $\underline{x}$ ) e dal controllo ( $\underline{u}$ ).

Dalla prima equazione invece vediamo che lo stato dipende dinamicamente dallo stato stesso e dal controllo.

Scrivendo esplicitamente le due equazioni otteniamo:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= a_{11}x_1(t) + a_{12}x_2(t) + \cdots + a_{1n_x}x_{n_x}(t) && + b_{11}u_1(t) + b_{12}u_2(t) + \cdots + b_{1n_u}u_{n_u}(t) \\ &\vdots \\ \dot{x}_{n_x}(t) &= a_{n_x1}x_1(t) + a_{n_x2}x_2(t) + \cdots + a_{n_xn_x}x_{n_x}(t) && + b_{n_x1}u_1(t) + b_{n_x2}u_2(t) + \cdots + b_{n_xn_u}u_{n_u}(t) \\ \\ y_1(t) &= c_{11}x_1(t) + c_{12}x_2(t) + \cdots + c_{1n_x}x_{n_x}(t) && + d_{11}u_1(t) + d_{12}u_2(t) + \cdots + d_{1n_u}u_{n_u}(t) \\ &\vdots \\ y_{n_y}(t) &= c_{n_y1}x_1(t) + c_{n_y2}x_2(t) + \cdots + c_{n_y n_x}x_{n_x}(t) && + d_{n_y1}u_1(t) + d_{n_y2}u_2(t) + \cdots + d_{n_y n_u}u_{n_u}(t) \end{aligned}$$

## 7.2 Soluzione dell'equazione di stato

Significa trovare  $\underline{x}(t)$  e di conseguenza  $\underline{y}(t)$ , dati  $\underline{x}(t_0^-)$  e  $u(\tau)$  per  $\tau \in [0, t_0]$ .

Si dimostra la seguente soluzione dell'equazione di stato, detta *equazione di Lagrange*:

$$\underline{x}(t) = e^{At}\underline{x}(0^-) + \int_{0^-}^t e^{A(t-\tau)}B\underline{u}(\tau)d\tau$$

da cui :

$$\underline{y}(t) = Ce^{At}\underline{x}(0^-) + C \int_{0^-}^t e^{A(t-\tau)}B\underline{u}(\tau)d\tau + D\underline{u}(t)$$

dove:

- $e^{At}\underline{x}(0^-)$  É l'evoluzione libera dello stato  $\underline{x}_l(t)$ .
- $\int_{0^-}^t e^{A(t-\tau)}B\underline{u}(\tau)d\tau$  É l'integrale di convoluzione che rappresenta l'evoluzione forzata dello stato  $\underline{x}_f(t)$ .
- $Ce^{At}\underline{x}(0^-)$  É l'uscita che dipende solo dalle  $n_x$  condizioni iniziali, pertanto si chiama *vettore delle uscite libere*  $\underline{y}_l(t)$ .
- $C \int_{0^-}^t e^{A(t-\tau)}B\underline{u}(\tau)d\tau + D\underline{u}(t)$  É il *vettore delle uscite forzate*  $\underline{y}_f(t)$ .

### 7.2.1 Come si calcola $e^{At}$

Scomponendo con Taylor:

$$e^{At} = I + \frac{At}{1!} + \frac{(At)^2}{2!} + \frac{(At)^3}{3!} + \dots = \sum_{k=0}^{k=\infty} \frac{A^k t^k}{k!}$$

Per effettuare questo calcolo distinguiamo vari casi:

- $A^k = 0$  per  $k \geq \bar{k}$  (matrice nil-potente di ordine  $\bar{k}$ ): usare la formula esplicitamente.

#### Esempio

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad A^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad A^k = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Abbiamo trovato che A é una matrice nil-potente di ordine 2.

$$e^{At} = I + At = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & t \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- A é una matrice diagonale:

$$e^{At} = \sum_{k=0}^{k=\infty} \begin{bmatrix} \frac{\lambda_1^k t^k}{k!} & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \frac{\lambda_{n_x}^k t^k}{k!} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & e^{\lambda_{n_x} t} \end{bmatrix}$$

- A é una matrice diagonalizzabile:

Possiamo quindi trovare una matrice  $D_A$  diagonale:  $A = TD_A T^{-1} \rightarrow D_A = T^{-1}AT$ .  
Inoltre si dimostra abbastanza agevolmente che  $A^K = TD_A^K T^{-1}$

Abbiamo perciò:

$$e^{At} = T e^{D_A t} T^{-1}$$

## 7.2. SOLUZIONE DELL'EQUAZIONE DI STATO

- $A$  é una matrice Jordanizzabile:

Possiamo quindi trovare una matrice di Jordan  $D_J$  diagonale a blocchi, i cui elementi sulla diagonale siano miniblocchi di Jordan  $M$  nella forma:

$$M = \begin{bmatrix} \lambda_i & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_i & 1 & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda_i \end{bmatrix}$$

Perció :  $A = TD_J T^{-1} \rightarrow D_J = T^{-1}AT$ .

Anche in questo caso  $A^K = TD_J^K T^{-1}$

Abbiamo perció:

$$e^{At} = T e^{D_J t} T^{-1}$$

- Negli altri casi usiamo questa formula generale, utile anche la maggior parte delle volte che sarà possibile usarla in modo piú agevole al posto dei metodi illustrati sopra, e che verrà chiarita in seguito:

$$e^{At} = \mathcal{L}^{-1} \{ (sI - A)^{-1} \}$$

**Esempio** Ripetiamo il calcolo dell'esempio precedente con  $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

$$e^{At} = \mathcal{L}^{-1} \{ (sI - A)^{-1} \} = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \begin{bmatrix} \frac{1}{s} & \frac{1}{s^2} \\ 0 & \frac{1}{s} \end{bmatrix} \right\} = \begin{bmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix} 1(t)$$

### 7.2.2 Polinomio caratteristico

Data una matrice quadrata  $A$ , il polinomio caratteristico é definito come:

$$\varphi(s) = \det(sI - A)$$

Inoltre si può calcolare come il m.c.m. dei denominatori di tutti i determinanti diversi da zero di tutte le sottomatrici quadrate di  $(sI - A)^{-1}$ . Questo metodo può essere utile nel caso in cui ci venga fornita direttamente  $(sI - A)^{-1}$  oppure la matrice non sia quadrata.

**Esempio**

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\varphi(s) = \det \left( s \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \right) = \det \left( \begin{bmatrix} s-1 & 0 \\ 0 & s-2 \end{bmatrix} \right) = (s-1)(s-2)$$

Gli autovalori sono:  $s_1 = 1$   $s_2 = 2$  entrambi con molteplicitá 1.

**Esempio** Usiamo il secondo metodo per calcolare il polinomio caratteristico data:

$$(sI - A)^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{s} & 0 \\ 0 & \frac{1}{s} \end{bmatrix}$$

Il suo determinante é:  $\det(sI - A)^{-1} = \frac{1}{s^2}$ .

Ci sono 5 sottomatrici: 4 sono i singoli elementi, il quinto é la matrice stessa:

$$\varphi(s) = mcm(s, s, s^2) = s^2$$

### Proprietá

- $\varphi(s)$  é un polinomio annullante per A se  $\varphi(A) = [0]$  (matrice nulla).
- Il suo grado é:  $\deg\{\varphi(s)\} = n_x$ .

**Esempio** Consideriamo la matrice e il polinomio caratteristico dell'esempio precedente:

$$\varphi(s) = (s - 1)(s - 2) = s^2 - 3s + 2$$

$$\varphi(A) = A^2 + -3A + 2I = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & 9 \\ 0 & 6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

### 7.2.3 Polinomio minimo

Il polinomio minimo  $m(s)$  é il polinomio annullante, monico e di grado piú basso per A.

### Proprietá

- 

$$m(s) \subseteq \cdot \varphi(s)$$

$\subseteq \cdot$  significa che tutte le radici di  $\varphi(s)$  sono anche radici di  $m(s)$ , eventualmente con molteplicitá minore.

- $m(s)$  é calcolabile come il mcm di tutti i denominatori dei termini non nulli della matrice  $(sI - A)^{-1}$ . Il suo grado é:  $\deg\{m(s)\} \leq n_x$ .

**Esempio** Per fare l'inversa di una matrice diagonale, bisogna invertire i suoi elementi.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (sI - A)^{-1} = \begin{bmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{s} & 0 \\ 0 & \frac{1}{s} \end{bmatrix}$$

$$m(s) = mcm(s, s) = s$$

**Esempio** Per fare l'inversa di una matrice triangolare, gli elementi sulla diagonale si invertono, gli altri bisogna calcolarli.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (sI - A)^{-1} = \begin{bmatrix} s & -1 \\ 0 & s \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{s} & \frac{1}{s^2} \\ 0 & \frac{1}{s} \end{bmatrix}$$

$$m(s) = mcm(s, s^2, s) = s^2$$

**Esempio di errore**

$$(sI - A)^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{s} & \frac{1}{s^2} \\ \frac{1}{s+1} & \frac{1}{s} \end{bmatrix}$$

$$m(s) = mcm \{s, (s+1), s, s^2\} = s^2(s+1)$$

Ma questo risultato é impossibile perché  $\deg \{m(s)\} = 3$  mentre la matrice é  $2 \times 2$ . Questo significa che la matrice data non può derivare da un sistema lineare, quindi non ha senso svolgere ulteriori calcoli su essa.

**7.3 Trasformata della soluzione dell'equazione di stato**

Calcolo la trasformata di  $\dot{\underline{x}}(t) = A\underline{x}(t) + B\underline{u}(t)$  con la proprietà della derivata:

$$s\underline{X}(s) - \underline{x}(0^-) = A\underline{X}(s) + B\underline{U}(s)$$

$$s\underline{X}(s) - A\underline{X}(s) = \underline{x}(0^-) + B\underline{U}(s)$$

$$(sI - A)\underline{X}(s) = \underline{x}(0^-) + B\underline{U}(s)$$

$$\underline{X}(s) = (sI - A)^{-1}\underline{x}(0^-) + (sI - A)^{-1}B\underline{U}(s) \quad (7.1)$$

Analogamente la trasformata della seconda equazione  $\underline{y}(t) = C\underline{x}(t) + D\underline{u}(t)$ :

$$\underline{Y}(s) = C(sI - A)^{-1}\underline{x}(0^-) + [C(sI - A)^{-1}B + D] \underline{U}(s) \quad (7.2)$$

Da quest'ultima ricaviamo la funzione di trasferimento:

$$T(s) = C(sI - A)^{-1}B + D$$

Le matrici associate alle varie risposte con i rispettivi polinomi caratteristici e minimi:

$$\begin{array}{lll} \underline{X}_l (n_x \times n_x) : (sI - A)^{-1} & \longrightarrow & m(s), \varphi(s) \\ \underline{X}_f (n_x \times n_u) : (sI - A)^{-1}B & \longrightarrow & m_c(s), \varphi_c(s) \\ \underline{Y}_l (n_y \times n_x) : C(sI - A)^{-1} & \longrightarrow & m_o(s), \varphi_o(s) \\ \underline{Y}_f (n_y \times n_u) : C(sI - A)^{-1}B & \longrightarrow & m_{co}(s), \varphi_{co}(s) \end{array}$$

Le ultime tre matrici sono combinazioni lineari della prima  $(sI - A)^{-1}$ , quindi al denominatore non potranno comparire ulteriori termini. Allora per i polinomi si ha:

$$\begin{array}{llll} \varphi_{co}(s) & \subseteq \varphi_c(s) & & \subseteq m_c(s) \\ & \subseteq \varphi(s) & m_{co}(s) & \subseteq m(s) \\ & \subseteq \varphi_o(s) & & \subseteq m_o(s) \end{array}$$

**Esempio** Dato il sistema:

$$\begin{cases} \dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \\ y = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} x \end{cases}$$

Calcolare  $x(t)$  e  $y(t)$  quando  $x(0^-) = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$  e  $u(t) = \mathbf{1}(t)$ .



Calcoliamo le trasformate delle soluzioni:

$$\begin{aligned} X(s) &= (sI - A)^{-1}x(0^-) + (sI - A)^{-1}B U(s) = \\ &= \begin{bmatrix} \frac{1}{s} & \frac{1}{s^2} \\ 0 & \frac{1}{s} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{s} & \frac{1}{s^2} \\ 0 & \frac{1}{s} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \frac{1}{s} = \begin{bmatrix} \frac{1}{s} + \frac{2}{s^2} + \frac{1}{s^3} \\ 2\frac{1}{s} + \frac{1}{s^2} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$x(t) = \begin{bmatrix} 1 + 2t + \frac{1}{2}t^2 \\ 2 + t \end{bmatrix} \mathbf{1}(t)$$

$$y(t) = [1 \quad 1] x(t) = (3 + 3t + \frac{1}{2}t^2) \mathbf{1}(t)$$

# Capitolo 8

## Stabilità e punti di equilibrio

Finora abbiamo parlato di stabilità mettendo in relazione ingresso e uscita. Adesso introduciamo un nuovo concetto di stabilità che mette in relazione stato e controllo.

### 8.1 Definizione qualitativa

Si dice **punto di equilibrio** una configurazione in cui il sistema si trova e, nonostante una piccola perturbazione, rimane in questa configurazione.

Consideriamo qualche esempio pratico per definire i possibili punti di equilibrio:

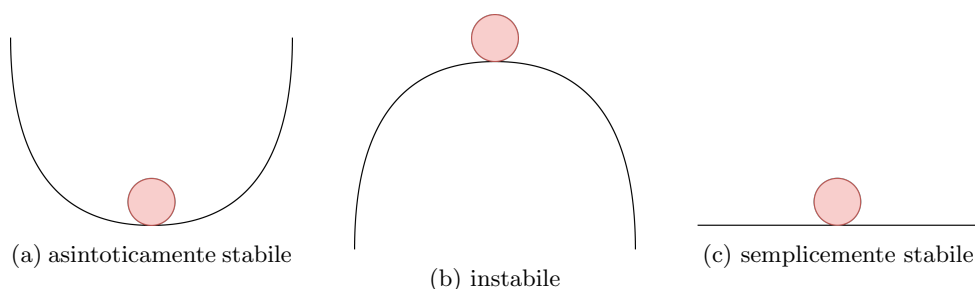


Figura 8.1

- **8.1a:** é un punto di equilibrio **asintoticamente stabile** perché se perturbo leggermente la posizione della pallina, essa torna subito nel suo punto di equilibrio. Inoltre é un p.e. **isolato** perché non ci sono altri p.e. nelle vicinanze;
- **8.1b:** é un punto di equilibrio **instabile** perché se muovo leggermente la pallina, essa si allontana indefinitamente dal p.e.;
- **8.1c:** é un punto di equilibrio **semplicemente stabile** perché se perturbo la posizione della pallina essa trova un nuovo punto di equilibrio. Inoltre é un p.e. **non isolato** perché nelle vicinanze ci sono altri p.e.

I punti di equilibrio non isolati NON possono essere asintoticamente stabili perché il sistema può trovare un nuovo punto di equilibrio in un intorno del precedente.

**Definizione 4.** Consideriamo l'equazione di stato di un generico sistema non lineare:

$$\begin{aligned}\dot{\underline{x}}(t) &= \underline{f}(\underline{x}(t), \underline{u}(t)) \\ \underline{y}(t) &= \underline{g}(\underline{x}(t), \underline{u}(t))\end{aligned}$$

Una coppia stato-controllo  $\hat{P} = (\hat{\underline{x}}, \hat{\underline{u}}) \in \mathbb{R}$  é punto di equilibrio **se e solo se**  $\underline{f}(\hat{\underline{x}}, \hat{\underline{u}}) = 0$  (cioé la derivata dello stato é nulla  $\dot{\underline{x}}(t) = 0$ ).

**Esempio** Consideriamo il sistema non lineare della *vasca* di cui avevamo parlato nell'introduzione. La sua equazione di stato era:

$$\dot{h}(t) = -\frac{E}{S}\sqrt{2gh(t)} + \frac{1}{S}u(t)$$

I punti di equilibrio sono:

$$\begin{aligned} \forall(h, u) \text{ t.c. } -\frac{E}{S}\sqrt{2gh(t)} + \frac{u}{S} &= 0 \\ \Rightarrow \hat{u} &= E\sqrt{2g\hat{h}} \end{aligned} \quad (8.1)$$

Cerchiamo di capire la tipologia di questo punto di equilibrio e per questo fissiamo l'ingresso (l'acqua fornita dal rubinetto) al valore di equilibrio  $u(t) = \hat{u}$ :

- se aggiungiamo acqua dall'esterno superando il livello di equilibrio  $h(t) > \hat{h}$ , dalla condizione di punto di equilibrio 8.1 otteniamo che  $E\sqrt{2gh(t)} > \hat{u}$ . Allora dall'equazione di stato ricaviamo  $S\dot{h}(t) = \hat{u} - E\sqrt{2gh(t)} < 0$ , la derivata é negativa, cioè che il livello dell'acqua scende tornando subito al punto di equilibrio  $(\hat{u}, \hat{h})$ ;
- se togliamo dell'acqua dalla vasca  $h(t) < \hat{h}$ , allora  $\dot{h}(t) > 0$ , cioè il livello risale tornando al punto di equilibrio di partenza  $(\hat{u}, \hat{h})$ .

Deduciamo che si tratta di un punto di equilibrio asintoticamente stabile.

## 8.2 Studio della stabilità dei punti di equilibrio per sistemi lineari

In generale in un sistema non é detto che i punti di equilibrio siano tutti dello stesso tipo.

Adesso consideriamo l'equazione di stato di un sistema lineare:

$$\dot{\underline{x}}(t) = A\underline{x}(t) + B\underline{u}(t)$$

(Non consideriamo la seconda equazione perché siamo interessati solo alla stabilità dello stato).

Prendiamo un punto di equilibrio  $(\hat{\underline{x}}, \hat{\underline{u}})$ , quindi per definizione  $A\hat{\underline{x}} + B\hat{\underline{u}} = 0$ . Definisco:

$$\delta\underline{x}(t) \triangleq \underline{x}(t) - \hat{\underline{x}} \quad \text{scostamento di } \underline{x} \text{ rispetto al particolare } \hat{\underline{x}} \quad (8.2)$$

$$\delta\dot{\underline{x}}(t) \triangleq \frac{d}{dt}(\underline{x}(t) - \hat{\underline{x}}) \quad (8.3)$$

Consideriamo l'equazione di stato quando viene applicato  $\underline{u} = \hat{\underline{u}} \Rightarrow \dot{\underline{x}}(t) = A\underline{x}(t) + B\hat{\underline{u}}$  e la calcoliamo nel punto di equilibrio:  $\dot{\hat{\underline{x}}} = A\hat{\underline{x}} + B\hat{\underline{u}}$ .

Sottraiamo membro a membro l'equazione di stato con l'equazione appena ottenuta:

$$\begin{aligned} \dot{\underline{x}}(t) - \dot{\hat{\underline{x}}} &= A(\underline{x}(t) - \hat{\underline{x}}) + B(\hat{\underline{u}} - \hat{\underline{u}}) \\ \frac{d}{dt}(\underline{x}(t) - \hat{\underline{x}}) &= A(\underline{x}(t) - \hat{\underline{x}}) \end{aligned}$$

In base alle definizioni 8.3 otteniamo:

$$\delta\dot{\underline{x}}(t) = A \delta\underline{x}(t) \quad (8.4)$$

cioé  $\delta\underline{x}(t)$  evolve con equazioni pari a quelle di  $\underline{x}(t)$  in assenza di controllo (evoluzione libera dello stato).

Per fare questi calcoli siamo partiti da un particolare punto di equilibrio, ma in 8.4 questa dipendenza si é persa, perciò 8.4 vale  $\forall(\hat{\underline{x}}, \hat{\underline{u}})$ .

Quindi se abbiamo la stessa evoluzione di  $\delta x(t)$  per ogni p.e., allora **per i sistemi lineari** tutti i punti di equilibrio sono dello stesso tipo. Per questo motivo si parla di **stabilità del sistema** (riferendosi al tipo di stabilità comune a tutti i suoi p.e.).

Poiché per studiare tutti i p.e. di un sistema lineare mi basta studiarne uno solo, per semplicità scelgo  $(0, 0)$  perché è sempre punto di equilibrio.

In definitiva studiare la stabilità di tutti i punti di equilibrio corrisponde allo studiare la stabilità dell'evoluzione libera dello stato:

$$\begin{aligned}\underline{x}_l(t) &= e^{At} \underline{x}(0^-) \\ X_l(s) &= (sI - A)^{-1} \underline{x}(0^-)\end{aligned}$$

### 8.3 Stabilità di un sistema

Un sistema è stabile oppure instabile a seconda di come si comporta  $\underline{x}_l(t)$ .

Un sistema lineare tempo invariante è:

- **asintoticamente stabile**  $\Leftrightarrow \forall \underline{x}(0^-)$  tale che  $\underline{x}_l(t)$  non diverge e  $\underline{x}_l(t) \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} 0$ ;
- **instabile**  $\Leftrightarrow \forall \underline{x}(0^-)$  tale che  $\underline{x}_l(t)$  diverge;
- **semplicemente stabile**  $\Leftrightarrow$  non è verificata nessuna delle condizioni precedenti, cioè
  - $\nexists \underline{x}(0^-)$  tale che  $\underline{x}_l(t)$  diverga
  - $\exists \underline{x}(0^-)$  tale che  $\underline{x}_l(t)$  non tende a zero

#### Esempio

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} x + Bu$$

Il termine  $Bu$  non è utile ai fini del calcolo della stabilità perché la stabilità di un sistema dipende dalla sua evoluzione libera, ma lo mettiamo per completezza.

$$\begin{cases} \dot{x}_1 &= x_1 \\ \dot{x}_2 &= -x_2 \\ \dot{x}_3 &= 0 \end{cases}$$

L'evoluzione libera dello stato (la soluzione di queste equazioni differenziali) è:

$$\underline{x}_l(t) = \begin{cases} x_{1l} &= e^t x_1(0^-) \\ x_{2l} &= e^{-t} x_2(0^-) \\ x_{3l} &= x_3(0^-) \end{cases} = e^{At} \underline{x}(0^-) = \begin{bmatrix} e^t & 0 & 0 \\ 0 & e^{-t} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \underline{x}(0^-)$$

Adesso studiamo la stabilità del sistema dati alcuni stati iniziali:

1.

$$\underline{x}(0^-) = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow x_l(t) = \begin{bmatrix} 3e^t \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Abbiamo trovato uno stato iniziale  $\underline{x}(0^-)$  per cui l'evoluzione libera diverge. Quindi in base alla definizione precedente possiamo stabilire che il sistema è instabile.

2.

$$\underline{x}(0^-) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 5 \end{bmatrix} \Rightarrow x_l(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 5 \end{bmatrix}$$

In questo caso lo stato rimane limitato ma non tende a zero.

3.

$$\underline{x}(0^-) = \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow x_l(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ -2e^{-t} \\ 0 \end{bmatrix}$$

In questa particolare situazione, lo stato tende a zero.

### 8.3.1 Studio della stabilità attraverso $e^{At}$

- **asintoticamente stabile**  $\Leftrightarrow$  tutte le componenti di  $e^{At}$  sono segnali  $\xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} 0$ ;
- **instabile**  $\Leftrightarrow$  esiste una componente di  $e^{At}$  che sia un segnale divergente;
- **semplicemente stabile**  $\Leftrightarrow$  non esistono componenti di  $e^{At}$  divergenti, ma esiste almeno una componente che sia un segnale semplicemente stabile (limitato ma che non tende a zero).

### 8.3.2 Studio della stabilità attraverso $(sI - A)^{-1}$

Poiché gli elementi di  $(sI - A)^{-1}$  sono le trasformate di Laplace dei corrispondenti elementi di  $e^{At}$ , il sistema é:

- **asintoticamente stabile**  $\Leftrightarrow$  tutte le radici di ogni denominatore degli elementi di  $(sI - A)^{-1}$  sono a  $\Re < 0$ ;
- **instabile**  $\Leftrightarrow$  esiste un elemento di  $(sI - A)^{-1}$ , il cui denominatore ha almeno una radice a  $\Re > 0$  oppure almeno una radice  $\Re = 0$  con molteplicitá  $> 1$ ;
- **semplicemente stabile**  $\Leftrightarrow$  non esistono radici di nessun denominatore a  $\Re > 0$  ma esiste almeno una radice a  $\Re = 0$  con molteplicitá 1.

#### Esempio

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} x$$

$$(sI - A)^{-1} = \begin{bmatrix} s-1 & 0 & 0 \\ 0 & s+1 & 0 \\ 0 & 0 & s \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{s-1} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{s+1} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{s} \end{bmatrix}$$

Il primo termine della matrice ha una radice a  $\Re > 0$  quindi il sistema é instabile.

#### Esempio

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} x$$

Qualunque stato iniziale é punto di equilibrio per il sistema, che quindi non possono essere isolati. Questo sistema allora non può essere asintoticamente stabile.

$$e^{At} = \begin{bmatrix} e^{0t} & 0 \\ 0 & e^{0t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (sI - A)^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{s} & 0 \\ 0 & \frac{1}{s} \end{bmatrix}$$

Le radici del denominatore sono tutte a  $\Re = 0$  con molteplicità 1. Allora il sistema è semplicemente stabile.

**Esempio**

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} x$$

$$(sI - A)^{-1} = \begin{bmatrix} s & -1 \\ 0 & s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{s} & \frac{1}{s^2} \\ 0 & \frac{1}{s} \end{bmatrix}$$

Il sistema è instabile perché esiste una radice del denominatore con  $\Re = 0$  e molteplicità 2.

**8.3.3 Studio della stabilità attraverso il polinomio minimo**

Un sistema è:

- **asintoticamente stabile** se tutte le radici di  $m(s)$  hanno  $\Re < 0$ ;
- **instabile** se  $m(s)$  ha almeno una radice a  $\Re > 0$  oppure esiste almeno una radice a  $\Re = 0$  ma con molteplicità  $> 1$  in  $m(s)$ ;
- **semplicemente stabile** in tutte le altre situazioni: nessuna radice a  $\Re > 0$  ma esiste almeno una radice a  $\Re = 0$  con molteplicità  $= 1$  in  $m(s)$ .

**Esempio**

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} x$$

Si tratta di una matrice triangolare a blocchi: gli autovalori sono l'unione degli autovalori delle sottomatrici.

$$\varphi(s) = \det \begin{bmatrix} s-1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & s+1 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & s & -1 \\ 0 & 0 & 1 & s \end{bmatrix} = (s-1)(s+1)(s^2+1)$$

Abbiamo 4 autovalori distinti:  $1, -1, j, -j$  e poiché  $m(s) \subseteq \cdot \varphi(s)$ , allora  $m(s) \equiv \varphi(s)$ .

Il sistema è instabile a causa di 1 perché ha  $\Re > 0$ .

**Esempio**

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & -1 & 7 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} x$$

Si tratta di una matrice triangolare a blocchi. Inoltre il blocco  $2 \times 2$  è a sua volta triangolare quindi i suoi autovalori sono gli elementi della diagonale. Gli autovalori della matrice sono:  $-1, -1, 0, 0$ .

$$\varphi(s) = (s+1)^2 s^2$$

Questa volta gli autovalori hanno una molteplicità  $> 1$ , quindi i possibili polinomi minimi sono:

$$(s+1)^2 s^2 \quad (s+1)s^2 \quad (s+1)^2 s \quad (s+1)s$$

Il polinomio caratteristico non basta per concludere sulla stabilità: dice solo che il sistema non è asintoticamente stabile perché è presente una radice a  $\Re = 0$  con molteplicità 2. Allora devo studiare anche  $(sI - A)^{-1}$ :

$$(sI - A)^{-1} = \begin{bmatrix} s+1 & * & * & * \\ 0 & s+1 & * & * \\ 0 & 0 & s & 0 \\ 0 & 0 & -1 & s \end{bmatrix}^{-1}$$

Con \* indichiamo i valori restanti della matrice che per ora non ci servono.

I primi due blocchi  $1 \times 1$  della matrice si invertono e otteniamo  $\frac{1}{s+1}$ .

Il terzo blocco  $2 \times 2$  lo calcoliamo a parte:

$$\begin{bmatrix} s & 0 \\ -1 & s \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{s} & 0 \\ \frac{1}{s^2} & \frac{1}{s} \end{bmatrix}$$

Il (2,1)-esimo elemento denota la instabilità perché mi assicura che anche nel polinomio minimo è presente il termine  $s^2$  (cioè una radice a  $\Re = 0$ , con molteplicità 2). Se non avessi trovato questo termine, avrei dovuto calcolare anche i termini della matrice inversa corrispondenti agli \*.

**Esempio** Al contrario del precedente, in questo esercizio non ci basterà fare l'inversa degli elementi sulla diagonale, ma dovremmo calcolare anche i restanti.

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} x$$

È una matrice triangolare a blocchi, quindi gli autovalori sono l'unione degli autovalori di ogni blocco. Per entrambi i blocchi gli autovalori sono  $\pm j$ , quindi avremo che gli autovalori della matrice sono  $j$  e  $-j$  con molteplicità 2. Allora il polinomio caratteristico è:

$$\varphi(s) = (s^2 + 1)^2$$

Deduciamo subito che il sistema non può essere asintoticamente stabile perché sono presenti radici a  $\Re = 0$ . Per determinare la stabilità studiamo  $(sI - A)^{-1}$ .

Facciamo l'inversa rispettivamente del primo e del secondo blocco:

$$\begin{bmatrix} s & -1 \\ 1 & s \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{s}{s^2+1} & \frac{1}{s^2+1} \\ -\frac{1}{s^2+1} & \frac{s}{s^2+1} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} s & 1 \\ -1 & s \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{s}{s^2+1} & -\frac{1}{s^2+1} \\ \frac{1}{s^2+1} & \frac{s}{s^2+1} \end{bmatrix}$$

Guardando solo questi blocchi concluderei erroneamente che il sistema é semplicemente stabile perché nel polinomio minimo abbiamo un fattore  $s^2 + 1$ , invece di  $(s^2 + 1)^2$ , quindi esiste una radice a  $\Re = 0$  con molteplicitá 1. In realtà basta calcolare l'inversa di un elemento non sulla diagonale, ad esempio il (1,3)-esimo:

$$(sI - A)_{1,3}^{-1} = \frac{s}{(s^2 + 1)^2}$$

Possiamo anche non calcolare i restanti elementi dell'inversa, perché questo appena calcolato ci assicura che nel polinomio minimo é presente il termine  $(s^2 + 1)^2$ , quindi c'è una radice a  $\Re = 0$  con molteplicitá 2.

Il sistema é instabile.

## 8.4 Linearizzazione dei sistemi non lineari

Considero il seguente sistema:

$$\dot{x}(t) = f[x(t), u(t)]$$

dove  $f$  é una funzione non lineare.

Considero il punto di equilibrio  $\hat{P} = (\hat{x}, \hat{u})$ , quindi per definizione di p.e.  $f(\hat{x}, \hat{u}) = 0$ .

Definiamo:

$$\begin{aligned}\delta x(t) &\triangleq x(t) - \hat{x} \\ \delta u(t) &\triangleq u(t) - \hat{u}\end{aligned}$$

Scriviamo il polinomio di Taylor di  $f$  attorno  $(\hat{x}, \hat{u})$ :

$$\begin{aligned}\dot{\delta x}(t) &= \frac{d}{dt} [x(t) - \hat{x}] = \dot{x}(t) = f[x(t), u(t)] = \\ &= f[\hat{x}, \hat{u}] + \left. \frac{\partial f(x, u)}{\partial x} \right|_{(\hat{x}, \hat{u})} \cdot (x - \hat{x}) + \left. \frac{\partial f(x, u)}{\partial u} \right|_{(\hat{x}, \hat{u})} \cdot (u - \hat{u}) + \text{Resto}\end{aligned}$$

Il sistema linearizzato attorno  $(\hat{x}, \hat{u})$  é:

$$\dot{\delta x}(t) \cong \hat{A}\delta x(t) + \hat{B}\delta u(t)$$

Per esempio  $(0, 0)$  é un punto di equilibrio sia per il sistema linearizzato che per il sistema non lineare. Posso provare a studiare la stabilitá del sistema linearizzato e *sperare* che valga anche per il sistema non lineare in corrispondenza del punto di equilibrio  $(\hat{x}, \hat{u})$  considerato.

### Esempio

$$\dot{x}(t) = \sin[x(t)] + u(t)$$

Cominciamo facendo un'analisi qualitativa dei punti di equilibrio di questo sistema non lineare:

- $u(t) = 0$  e  $x(t) = 0$  sono un punto di equilibrio;
- se  $|u(t)| > 1$ , poiché il seno é compreso tra  $-1$  e  $1$ , non potrà mai essere punto di equilibrio;
- se  $|u(t)| < 1$  si può trovare un valore del seno che compensi  $u(t)$ .

In particolare, per  $\hat{u} = 0$ ,  $\dot{x} = 0 \Leftrightarrow \sin(\hat{x}) = 0$ , cioè  $x = k\pi$  per  $k \in \mathbb{Z}$ .

L'equazione di stato diventa:

$$\dot{x} = \sin(x)$$

Osserviamo due punti di equilibrio:



- $(0, 0)$ : se aumentiamo leggermente  $x$  (ci allontaniamo verso destra di  $x = 0$ ), il seno assume valori positivi, quindi  $\dot{x} > 0$ , cioè lo stato tende ad aumentare sempre piú; se diminuiamo leggermente  $x$  (ci allontaniamo verso sinistra di  $x = 0$ ), il seno assume valori negativi, quindi  $\dot{x} < 0$ , cioè lo stato tende a diminuire sempre di piú. Allora questo é un punto di equilibrio instabile localmente.
- $(\pi, 0)$ : se aumentiamo leggermente  $x$ , la derivata é negativa, cioè lo stato tende a tornare al punto di equilibrio; lo stesso accade se diminuiamo leggermente  $x$ , la derivata é positiva, cioè lo stato tende ad aumentare opponendosi alla nostra variazione. Allora si tratta di un punto di equilibrio asintoticamente stabile localmente.

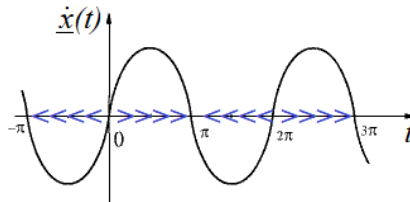


Figura 8.2: Grafico della derivata dello stato. In blu le direzioni di incremento (verso destra, quando la derivata é positiva) e di decremento (verso sinistra, quando la derivata é negativa).

Adesso studiamo il sistema linearizzato:

$$\hat{A} = \left. \frac{\partial f(x, u)}{\partial x} \right|_{\hat{x}, \hat{u}} = \cos x|_{\hat{x}, \hat{u}} = \cos \hat{x}$$

$$\hat{B} = \left. \frac{\partial f(x, u)}{\partial u} \right|_{\hat{x}, \hat{u}} = 1$$

- attorno  $(0, 0)$ :

$$\delta \dot{x} = 1 \cdot \delta x + 1 \cdot \delta u$$

si tratta di un sistema linearizzato instabile (perché l'unico autovalore di  $(sI - A)^{-1} = (s - 1)^{-1}$  é  $s = 1$ , che ha  $\Re > 0$ ), congruente alla stabilità del punto di equilibrio del sistema non lineare di partenza.

- attorno  $(\pi, 0)$ :

$$\delta \dot{x} = -1 \cdot \delta x + 1 \cdot \delta u$$

si tratta di un sistema linearizzato asintoticamente stabile, come la stabilità del punto di equilibrio del sistema non lineare di partenza.

**Esempio** Consideriamo il sistema non lineare della vasca già analizzato in precedenza:

$$\dot{x} = -\frac{E}{S} \sqrt{2gx} + \frac{1}{S} u = f(x, u)$$

Lo linearizziamo:

$$\frac{\partial f(x, u)}{\partial x} = -\frac{E}{2S} \sqrt{\frac{2g}{x}}$$

$$\frac{\partial f(x, u)}{\partial u} = \frac{1}{S}$$

$$\delta \dot{x} = -\frac{E}{2S} \sqrt{\frac{2g}{\hat{x}}} \delta x + \frac{1}{S} \delta u = -\alpha \delta x + \frac{1}{S} \delta u$$

(Il termine  $\frac{1}{S} \delta u$  era già lineare e infatti non é stato modificato dalla linearizzazione).

Il sistema linearizzato é asintoticamente stabile  $\forall \hat{x} > 0$ . Notiamo che piú  $\hat{x}$  é piccolo, piú  $\delta x$  diventa grande e negativa: cioè il sistema tende a tornare nel punto di equilibrio piú velocemente, piú  $\hat{x}$  é piccolo.

### 8.4.1 Studio della stabilitá dei punti di equilibrio per sistemi non lineari

Dato un sistema non lineare

$$\dot{x} = f[x, u]$$

linearizzato attorno al punto di equilibrio  $(\hat{x}, \hat{u})$ :

$$\delta \dot{x}(t) = \hat{A} \delta x(t) + \hat{B} \delta u(t)$$

Se il sistema linearizzato ha:

- tutti autovalori di  $(sI - A)^{-1}$  sono a  $\Re < 0 \Rightarrow (\hat{x}, \hat{u})$  é **asintoticamente stabile localmente** per il sistema non lineare;
- almeno un autovalore di  $(sI - A)^{-1}$  é a  $\Re > 0 \Rightarrow (\hat{x}, \hat{u})$  é **instabile localmente** per il sistema non lineare;
- in tutti gli altri casi (esistono autovalori di  $(sI - A)^{-1}$  del sistema linearizzato a  $\Re = 0$  e nessuno a  $\Re > 0$ )  $\Rightarrow$  **non si conclude** nulla sulla stabilitá del sistema non lineare, anche se il sistema linearizzato é semplicemente stabile.

**Esempio** Prendiamo il punto di equilibrio  $(0, \hat{u})$  e analizziamo i seguenti sistemi:

1.  $\dot{x} = x$  é un sistema lineare instabile. La linearizzazione  $\delta \dot{x} = \delta x$  ovviamente coincide con il sistema;
2.  $\dot{x} = -x$  é un sistema lineare asintoticamente stabile. La linearizzazione non cambia  $\delta \dot{x} = -\delta x$ ;
3.  $\dot{x} = x^2$  é un sistema non lineare instabile. Se linearizziamo attorno  $\hat{x} = 0$ , otteniamo

$$\delta \dot{x} = \left. \frac{\partial x^2}{\partial x} \right|_{x=0} = 2x|_{x=0} = 0$$

perché nell'origine la pendenza é nulla. Quindi il sistema linearizzato é semplicemente stabile come avevamo visto nell'esempio 8.3.2;

4.  $\dot{x} = -x^2$  é un sistema non lineare instabile. Se linearizziamo attorno  $\hat{x} = 0$ , otteniamo  $\delta \dot{x} = 0$ . Il sistema linearizzato é semplicemente stabile;
5.  $\dot{x} = x^3$  é un sistema non lineare instabile. Se linearizziamo attorno  $\hat{x} = 0$ , otteniamo  $\delta \dot{x} = 0$ . Il sistema linearizzato é semplicemente stabile;
6.  $\dot{x} = -x^3$  é un sistema non lineare asintoticamente stabile. Se linearizziamo attorno  $\hat{x} = 0$ , otteniamo  $\delta \dot{x} = 0$ . Il sistema linearizzato é semplicemente stabile;

Negli esempi 3, 4, 5, 6 abbiamo sistemi non lineari in cui si puó verificare facilmente se sono instabili o asintoticamente stabili, mentre il sistema linearizzato nell'intorno del punto di equilibrio é semplicemente stabile e quindi non ci dá alcuna informazione utile.

### 8.4.2 Modello preda predatore

Definiamo:

- $N(t)$  il numero di prede;
- $P(t)$  il numero di predatori.

Inoltre ipotizziamo che le risorse per le prede siano infinite. Quindi le equazioni che modellano l'evoluzione della specie in questo ecosistema sono:

$$\begin{aligned}\dot{N} &= rN - cNP \\ \dot{P} &= -dP + bNP\end{aligned}$$

Riscriviamo il sistema introducendo nuove variabili:

$$\begin{aligned}x_1 &= \frac{b}{d}N & x_2 &= \frac{c}{r}P \\ \dot{x} &= \underline{f}(x_1, x_2) = \begin{cases} \dot{x}_1 &= rx_1(1-x_2) \\ \dot{x}_2 &= dx_2(x_1-1) \end{cases}\end{aligned}$$

Adesso studiamo i punti di equilibrio  $(\hat{x}_1, \hat{x}_2)$  tale che  $\underline{f}(x_1, x_2) = \underline{0}$ . Le soluzioni di questo sistema omogeneo sono:

$$P_A = (0, 0) \quad P_B = (1, 1)$$

Analizziamo qualitativamente la natura di questi punti di equilibrio:

- $P_A$ :

- $x_2 = 0$ : equivale a  $P = 0$  non ci sono predatori, quindi la legge che regola le prede é  $\dot{N} = rN$ . Come ci aspettiamo intuitivamente, se aumentiamo leggermente il numero di prede dal punto di equilibrio  $x_1 = 0$ , esse aumentano indefinitamente grazie alle risorse infinite.

Infatti abbiamo un sistema lineare con un autovalore positivo: il punto di equilibrio é instabile localmente.

- $x_1 = 0$ : equivale a  $N = 0$ , cioè non ci sono prede, quindi la legge che regola i predatori é  $\dot{P} = -dP$ . Se aumentiamo il numero di predatori nell'ecosistema da zero a un certo valore positivo, poiché non hanno nutrimento (non ci sono prede), si estingueranno.

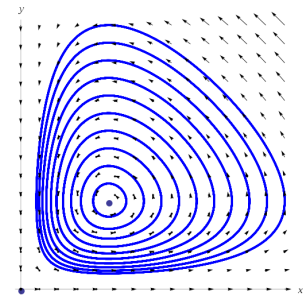
Il sistema é lineare con un autovalore negativo: il punto di equilibrio é asintoticamente stabile.

Possiamo concludere che si tratta di un punto di equilibrio instabile.

- $P_B$ :

Ovunque mettiamo la coppia preda-predatore, essa si trova su un'orbita chiusa di  $P_B$ .

Allontanandosi dal punto, le orbite si allargano fino a degenerare e a coincidere con gli assi. Quindi si tratta di un punto di equilibrio semplicemente stabile.



Adesso analizziamo il sistema linearizzandolo:

$$\frac{\partial \underline{f}}{\partial x} = \begin{bmatrix} r(1-x_2) & -rx_1 \\ dx_2 & d(x_1-1) \end{bmatrix}$$

- attorno  $P_A$ :  $\hat{A} = \frac{\partial \underline{f}}{\partial x} \Big|_{(0,0)} = \begin{bmatrix} r & 0 \\ 0 & -d \end{bmatrix}$ .

Il sistema linearizzato ha un autovalore reale positivo, allora il punto di equilibrio del sistema non lineare é instabile.

- attorno  $P_B$ :  $\hat{A} = \begin{bmatrix} 0 & -r \\ d & 0 \end{bmatrix}$

$$\varphi(s) = \det \begin{bmatrix} s & r \\ -d & s \end{bmatrix} = s^2 + rd$$

Poiché  $rd > 0$ , abbiamo due radici immaginarie pure con molteplicitá 1:  $s_1 = j\sqrt{rd}$  e  $s_2 = -j\sqrt{rd}$ . Il sistema linearizzato é semplicemente stabile, ma questo non ci basta per concludere anche per il sistema non lineare.

# Capitolo 9

## Teoria del controllo

### 9.1 Raggiungibilità e controllabilità

Dato un sistema  $\dot{x} = Ax + Bu$ :

$\hat{x}$  é uno stato **raggiungibile** in un tempo  $\hat{t}$  se  $\exists \hat{u}(t)$ ,  $t \in [0, \hat{t}]$  tale che se  $x(0^-) = 0$  e  $u(t) = \hat{u}(t)$ , allora  $x(\hat{t}) = \hat{x}$ .

$X_R(\hat{t})$  sottospazio degli stati raggiungibili in  $\hat{t}$

$\tilde{x}$  é uno stato **controllabile** in un tempo  $\tilde{t}$  se  $\exists \tilde{u}(t)$ ,  $t \in [0, \tilde{t}]$  tale che se  $x(0^-) = \tilde{x}$  e  $u(t) = \tilde{u}(t)$ , allora  $x(\tilde{t}) = 0$ .

$X_C(\tilde{t})$  sottospazio degli stati controllabili in  $\tilde{t}$

#### 9.1.1 Proprietá per i sistemi LTI a tempo continuo

Per i sistemi LTI a tempo continuo valgono le seguenti proprietá:

- $\tilde{x}$  é raggiungibile in  $\tilde{t}$  se e solo se  $\tilde{x}$  é controllabile.

$$X_R(\tilde{t}) \equiv X_C(\tilde{t})$$

Questo é dovuto al fatto che la matrice  $e^{A\tilde{t}}$  é sempre invertibile (che per la proprietá dell'esponenziale si può calcolare come  $(e^{A\tilde{t}})^{-1} = e^{-A\tilde{t}}$ ).

- se  $\tilde{x} \in X_R(\tilde{t})$ , allora  $\tilde{x} \in X_C(\tilde{t}) \forall \tilde{t} > 0$ . Lo stesso vale per  $X_C$  per la proprietá precedente.

Per i sistemi LTI si parla dunque di  $X_R \equiv X_C$  indipendentemente dal tempo.

Infatti se prendiamo un sistema  $\dot{x} = Ax + Bu$  completamente controllabile in  $\tilde{t}$ , dato uno stato iniziale  $x(0^-) = \hat{x}$  otteniamo che lo stato in  $\tilde{t}$  sia  $x(\tilde{t}) = \tilde{x}$ ;

**Dimostrazione dell'indipendenza da  $t$**  Dimostriamo questa proprietá per un determinato controllo, utilizzando  $W(t)$ , detta *matrice Gramiana di controllabilità*:

$$\tilde{u}(\tau) = B^T e^{A^T(\tilde{t}-\tau)} \cdot \left[ \int_{0^-}^{\tilde{t}} e^{A(\tilde{t}-\epsilon)} B B^T e^{A^T(\tilde{t}-\epsilon)} d\epsilon \right]^{-1} \cdot (\tilde{x} - e^{A\tilde{t}} \hat{x}) = B^T e^{A^T(\tilde{t}-\tau)} \cdot W^{-1}(\tilde{t}) \cdot (\tilde{x} - e^{A\tilde{t}} \hat{x})$$

Applico l'equazione di Lagrange per calcolare  $x(\tilde{t})$ :

$$\begin{aligned} x(\tilde{t}) &= e^{A\tilde{t}} \hat{x} + \underbrace{\int_{0^-}^{\tilde{t}} e^{A(\tilde{t}-\tau)} B B^T e^{A^T(\tilde{t}-\tau)} W^{-1}(\tilde{t}) (\tilde{x} - e^{A\tilde{t}} \hat{x})}_{W(\tilde{t})} = \\ &= e^{A\tilde{t}} \hat{x} + [W(\tilde{t}) W^{-1}(\tilde{t})] (\tilde{x} - e^{A\tilde{t}} \hat{x}) = \hat{x} \quad \forall \tilde{t} > 0 \end{aligned}$$

## 9.1. RAGGIUNGIBILITÀ E CONTROLLABILITÀ

Ho dimostrato che partendo da dove voglio  $\hat{x}$ , arrivo dove voglio  $\tilde{x}$  in un tempo a piacere, se prendo il giusto controllo  $\tilde{u}(t)$ . **C.V.D.**

Inoltre valgono le seguenti proprietà per  $X_R \equiv X_C$ :

- $X_R$  è invariante rispetto ad A:

$$\tilde{x} \in X_R \Rightarrow A\tilde{x} \in X_R$$

cioè se è controllabile, allora posso imporre la direzione con cui lo stato si muove.

- $X_R$  è invariante per il sistema:

$$x(\hat{t}) \in X_R \Rightarrow x(t) \in X_R \forall t \geq \hat{t}$$

cioè se lo stato è dentro lo spazio di raggiungibilità, ci rimane per sempre.

- $X_R$  è un sottospazio lineare: se posso raggiungere due stati  $\tilde{x}_1$  e  $\tilde{x}_2$ , allora posso raggiungere una qualunque combinazione lineare.

Possiamo dimostrarlo con la proprietà di sovrapposizione degli effetti: dati  $x_A, x_B \in X_R$

$$- x(0^-) = 0 \Rightarrow \exists u_A(\tau) \text{ tale che } x(\hat{t}) = x_A$$

$$- x(0^-) = 0 \Rightarrow \exists u_B(\tau) \text{ tale che } x(\hat{t}) = x_B$$

$$u(\tau) = \alpha u_A(\tau) + \beta u_B(\tau) \Rightarrow x(\hat{t}) = \alpha x_A + \beta x_B$$

Poiché si tratta di un sottospazio lineare,  $\tilde{x} = 0$  è sempre incluso in  $X_R$ . Quindi non esiste un sistema con  $X_R$  insieme vuoto, perché l'origine c'è sempre.

### 9.1.2 Completa controllabilità

Supponiamo di avere il seguente sistema:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1 \\ 0 \end{bmatrix} u(t)$$

Dalla seconda equazione vedo che  $x_2$  da  $u$  direttamente né indirettamente attraverso  $x_1$ .  $x_2$  non è controllabile e quindi il sistema non è **completamente controllabile**.

#### Esempio

$$\dot{\underline{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 19 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \underline{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u$$

Si nota che le ultime due componenti dello stato non sono controllabili:

$$\dot{x}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} x_2$$

Quindi il sistema non è completamente controllabile.

Per esercizio calcoliamo la trasformata della soluzione di questa equazione differenziale:

$$X_2(s) = \begin{bmatrix} s & -1 \\ 1 & s \end{bmatrix}^{-1} \underline{x}(0^-) = \begin{bmatrix} \frac{s}{s^2+1} & \frac{1}{s^2+1} \\ \frac{-1}{s^2+1} & \frac{s}{s^2+1} \end{bmatrix} \underline{x}(0^-) =$$

Antitrasformiamo:

$$\underline{x}_2(t) = \begin{bmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{bmatrix} 1(t) \underline{x}(0^-)$$

### 9.1.3 Teorema di Cayley-Hamilton

Data una matrice quadrata  $A \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x}$  e il relativo polinomio caratteristico  $\varphi(s) = \det(sI - A)$ , allora:

$$\varphi(A) = 0$$

In generale:

$$\varphi(s) = s^{n_x} + \varphi_{n_x-1}s^{n_x-1} + \dots + \varphi_1s + \varphi_0$$

Per il teorema di Cayley-Hamilton:

$$\varphi(A) = A^{n_x} + \varphi_{n_x-1}A^{n_x-1} + \dots + \varphi_1A + \varphi_0I = 0 \quad (9.1)$$

$$A^{n_x} = -\varphi_{n_x-1}A^{n_x-1} - \dots - \varphi_1A - \varphi_0I \quad (9.2)$$

$A_{n_x}$  é combinazione lineare di  $I, A, \dots, A_{n_x-1}$ .

**Come calcolare  $A^{n_x+k} \forall k \geq 0$**

Per esempio cominciamo da  $k = 1$ :

$$A^{n_x+1} = A^{n_x}A = \underbrace{-\varphi_{n_x-1}A^{n_x}}_{\text{comb. lineare di } I, A, \dots, A_{n_x-1}} \underbrace{-\varphi_{n_x-2}A^{n_x-1} - \dots - \varphi_1A^2 - \varphi_0A}_{\text{comb. lineare di } I, A, \dots, A_{n_x-1}}$$

Quindi  $A^{n_x+1}$  é combinazione lineare di  $I, A, \dots, A_{n_x-1}$ .

In generale  $A^{n_x+k}$  é combinazione lineare di  $I, A, \dots, A_{n_x-1}$ .

**Com'è fatto  $X_R$**

Se ipotizziamo  $\underline{x}(0^-) = 0$ :

$$X_R = \left\{ \text{sottospazio di tutti i } \tilde{x} \text{ raggiungibili} \right\} = \left\{ \int_{0^-}^{\tilde{t}} e^{A(\tilde{t}-\tau)} B \tilde{u}(\tau) d\tau, \forall \tilde{t} \right\}^1$$

L'integrale può essere visto come combinazione lineare di infiniti termini tra  $e^{A(\tilde{t}-\tau)}B$  e  $u(\tau)$ :

$$X_R = \left\{ \text{tutte le possibili combinazioni lineari di tutte le colonne di } e^{A(\tilde{t}-\tau)}B \right\}$$

Ma abbiamo visto che  $e^{At} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k t^k}{k!}$ :

$$\begin{aligned} e^{A(\tilde{t}-\tau)} &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k (\tilde{t}-\tau)^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\tilde{t}-\tau)^k}{k!} A^k = \\ &= I + \alpha_1 A^1 + \alpha_2 A^2 + \dots + \alpha_{n_x-1} A^{n_x-1} + \sum_{k=n_x}^{\infty} \alpha_k A^k \end{aligned}$$

Abbiamo dimostrato che  $A^k$  é combinazione lineare di tutti i termini precedenti  $I, A, \dots, A_{n_x-1}$ . Quindi:

$$e^{A(\tilde{t}-\tau)} = \text{combinazione lineare}(I, A, \dots, A_{n_x-1})$$

In definitiva l'integrale é combinazione lineare delle colonne di  $e^{A(\tilde{t}-\tau)}B \forall (\tilde{t}-\tau)$ , che equivale a una matrice del tipo:

$$[B | AB | \dots | A^{n_x-1}B]$$

<sup>1</sup>É l'equazione di Lagrange calcolata con  $x(0^-) = 0$

### 9.1.4 Teorema di Kalman di raggiungibilità

$X_R$  é combinazione lineare di tutte le colonne di:

$$P = [B|AB|\dots|A^{n_x-1}B]$$

Il teorema si può anche scrivere come:

$$X_R = \text{Immagine}([B|AB|\dots|A^{n_x-1}B])$$

**Esempio** Alcune volte non tutte le colonne di  $P$  sono necessarie:

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 10 & 5 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} u$$

Ci sono 2 variabili di controllo  $n_u = 2$  e 2 variabili di stato  $n_x = 2$ .

$$P = [B|AB] = \left[ \begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & & \dots \\ 0 & 1 & & \dots \end{array} \right]$$

In questo caso solo con  $B$  ho già  $n_x = 2$  colonne linearmente indipendenti:  $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$  e  $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ . Quindi é inutile scrivere le matrici successive di  $P$ , perché le loro colonne saranno sicuramente linearmente dipendenti a quelle di  $B$ .

In conclusione  $\dim(X_R) = 2$ .

### 9.1.5 Corollari del teorema di Kalman

•

$$\dim(X_R) = \text{rank}(P)$$

La matrice  $P$  ha un numero di colonne e righe pari a:

$$P = \left[ \underbrace{\begin{array}{c|c|c|c} B & AB & \dots & A^{n_x-1}B \\ \hline n_u & n_u & & n_u \end{array}}_{n_u \times n_u \text{ colonne}} \right] \left. \vphantom{\begin{array}{c|c|c|c} B & AB & \dots & A^{n_x-1}B \\ \hline n_u & n_u & & n_u \end{array}} \right\} n_x \text{ righe}$$

Quindi il rango di  $P$  può essere al massimo  $n_x$ .

•

$$X_R \equiv \mathbb{R}^{n_x} \Leftrightarrow \text{rank}(P) = n_x \Leftrightarrow \text{ sistema completamente controllabile}$$

•

$$\text{rank}(P) + \dim(\ker(P)) = n_x$$

dove  $\ker$  é l'operatore kernel:  $\ker(P) = \underline{v}$  tale che  $P\underline{v} = 0$

• Il teorema di Kalman di raggiungibilità può essere applicato separatamente su ogni singola variabile di controllo o gruppi di esse.

**Esempio** In questo sistema non tutti i controlli sono necessari per controllare il sistema.

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} u$$

$$P = \left[ \begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{array} \right]$$

$\text{rank}(P) = n_x = 2$  quindi il sistema é completamente controllabile se usiamo entrambi i controlli.

Adesso proviamo ad usare solo  $u_1$ :

$$P_1 = [B_1 | AB_1] = \begin{bmatrix} 1 & | & 0 \\ 0 & | & 0 \end{bmatrix}$$

$\text{rank}(P_1) \neq 2$  quindi il sistema non é completamente controllabile con  $u_1$ .

Applichiamo solo  $u_2$ :

$$P_2 = [B_2 | AB_2] = \begin{bmatrix} 0 & | & 1 \\ 1 & | & 0 \end{bmatrix}$$

$\text{rank}(P_2) = 2$  quindi il sistema é completamente controllabile con  $u_2$ .

### 9.1.6 Cambio di base

Prendiamo una matrice quadrata e invertibile  $T$ . Il cambio di base sará descritto dalla relazione:

$$x = Tz$$

Effettuiamo il cambio di base:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= (\dot{T}z) = T\dot{z} = ATz + Bu \\ y &= CTz + Du \end{aligned}$$

Moltiplichiamo la prima equazione a sinistra per  $T^{-1}$ :

$$\dot{z} = T^{-1}ATz + T^{-1}Bu = \tilde{A}z + \tilde{B}u \quad (9.3)$$

$$y = CTz + Du = \tilde{C}z + \tilde{D}u \quad (9.4)$$

La funzione di trasferimento non cambia perché il cambiamento di base coinvolge solo lo stato del sistema, non la relazione ingresso uscita:

$$T(s) = C(sI - A)^{-1}B + D = \tilde{C}(sI - \tilde{A})^{-1}\tilde{B} + \tilde{D}$$

Si può verificare attraverso il teorema di Kalman che lo spazio di raggiungibilità é invariante rispetto al cambio di base:

$$Z_R = \text{Im} \left\{ \tilde{P} = \left[ \tilde{B} | \tilde{A}\tilde{B} | \dots | \tilde{A}^{n_x-1}\tilde{B} \right] \right\}$$

$$\tilde{B} = T^{-1}B$$

$$\tilde{A}\tilde{B} = T^{-1}ATT^{-1}B = T^{-1}AB$$

$\vdots$

$$\tilde{A}^{n_x-1}\tilde{B} = T^{-1}A^{n_x-1}B$$

Quindi:

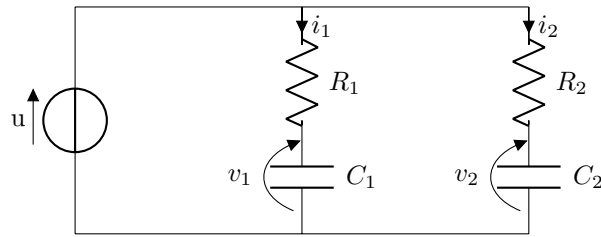
$$\tilde{P} = [T^{-1}B | T^{-1}AB | \dots | T^{-1}A^{n_x-1}B] = T^{-1} [B | AB | \dots | A^{n_x-1}B] = T^{-1}P$$

Il sottospazio degli stati raggiungibili nella nuova base é:

$$Z_R = T^{-1}X_R$$

**\*\*\* Esercizio 7** Studiare la controllabilità di due rami RC in parallelo





Nei circuiti a parametri concentrati, le variabili di stato possono essere identificate con i dispositivi che accumulano energia (in questo caso i condensatori):

$$x_1 \triangleq v_1 \quad x_2 \triangleq v_2$$

Scriviamo le equazioni delle maglie:

$$\begin{aligned} u = R_1 i_1 + v_1 &\Rightarrow i_1 = \frac{1}{R_1}(u - v_1) \\ u = R_2 i_2 + v_2 &\Rightarrow i_2 = \frac{1}{R_2}(u - v_2) \end{aligned}$$

Le sostituiamo nelle equazioni descrittive dei condensatori:

$$\begin{aligned} \dot{v}_1 = \frac{1}{C_1} i_1 &= \frac{1}{R_1 C_1}(u - v_1) \\ \dot{v}_2 = \frac{1}{C_2} i_2 &= \frac{1}{R_2 C_2}(u - v_2) \end{aligned}$$

Ridefiniamo le costanti di tempo:

$$\frac{1}{R_1 C_1} = \frac{1}{\tau_1} \triangleq \alpha_1 \quad \frac{1}{R_2 C_2} = \frac{1}{\tau_2} \triangleq \alpha_2$$

dove  $\alpha_1 \neq 0$  e  $\alpha_2 \neq 0$ .

Le equazioni di stato del sistema diventano:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -\alpha_1 x_1 + \alpha_1 u \\ \dot{x}_2 = -\alpha_2 x_2 + \alpha_2 u \end{cases} \quad \dot{x} = \begin{bmatrix} -\alpha_1 & 0 \\ 0 & -\alpha_2 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix} u$$

Calcoliamo la matrice  $P$ :

$$P = \begin{bmatrix} \alpha_1 & | & -\alpha_1^2 \\ \alpha_2 & | & -\alpha_2^2 \end{bmatrix}$$

$$\det(P) = -\alpha_1 \alpha_2^2 + \alpha_1^2 \alpha_2 = -\alpha_1 \alpha_2 (\alpha_2 - \alpha_1)$$

$$\det(P) \neq 0 \Leftrightarrow \alpha_1 \neq \alpha_2 \Leftrightarrow X_R = \mathbb{R}^2$$

il sistema é completamente raggiungibile.

Nel circuito equivale a  $\tau_1 \neq \tau_2 \Leftrightarrow R_1 C_1 \neq R_2 C_2$ .

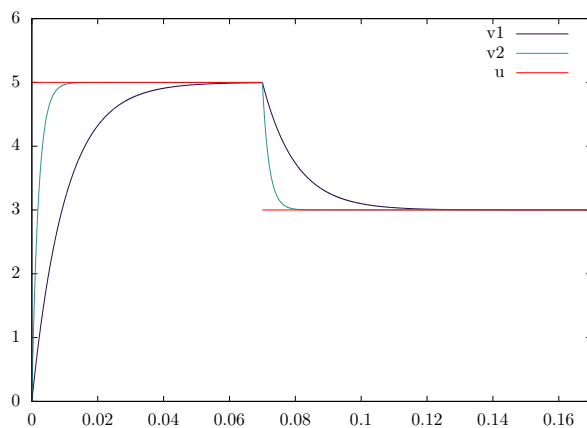


Figura 9.1: Andamento di  $v_1$  e  $v_2$  per  $\tau_1 = 0.01s$  e  $\tau_2 = 0.002s$

**Osservazione** Ragionando intuitivamente sul grafico potremmo pensare che in realtà questo sistema non *raggiunge* qualunque coppia di stati noi desideriamo  $(x_1, x_2)$  con  $x_1 \neq x_2$ , perché la tensione sui condensatori va sempre a stabilizzarsi asintoticamente alla tensione imposta dal generatore. In realtà per *raggiungere* uno stato, basta che lo stato del sistema assuma quel valore in un certo istante di tempo.

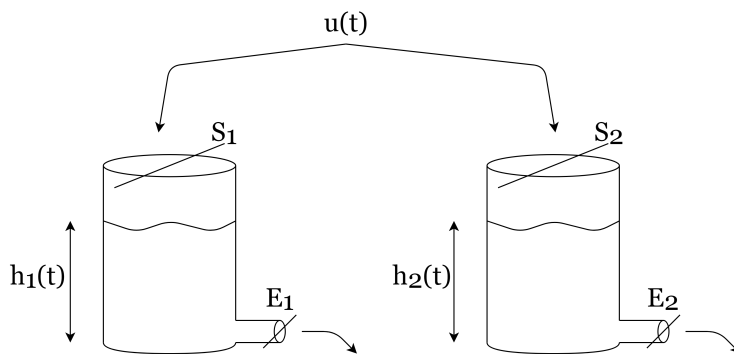
Se lo stato assume un valore e lo mantiene, allora si tratta di un punto di equilibrio. Infatti è facile intuire che i punti di equilibrio di questo sistema sono caratterizzati dalla relazione  $u = x_1 = x_2$ . Verifichiamolo:

$$(\tilde{x}, \tilde{u}) \text{ é punto di equilibrio} \Leftrightarrow A\tilde{x} + B\tilde{u} = 0$$

$$-\begin{bmatrix} -\alpha_1 & 0 \\ 0 & -\alpha_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{x}_1 \\ \tilde{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix} \tilde{u} \quad \Rightarrow \quad \begin{bmatrix} \alpha_1 \tilde{x}_1 \\ \alpha_2 \tilde{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_1 \tilde{u} \\ \alpha_2 \tilde{u} \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \tilde{x}_1 = \tilde{u} \\ \tilde{x}_2 = \tilde{u} \end{cases}$$

Quindi i punti di equilibrio sono  $A = (\tilde{x}, \tilde{u}) = [(\beta, \beta), \beta]$

**\*\* Esercizio 8** Studiare la controllabilità di due vasche in parallelo



Consideriamo l'esempio del sistema non lineare delle vasche:

$$\dot{h} = \frac{1}{S}u - \frac{E}{S}\sqrt{2gh}$$

Linearizzato attorno al punto di equilibrio  $(\tilde{h}, \tilde{u})$ :

$$\delta \dot{h} = -\alpha \delta h + \beta \delta u$$

$$\delta h = h - \tilde{h} \quad \delta u = u - \tilde{u}$$

Se abbiamo due vasche in parallelo:

$$\begin{cases} \delta \dot{h}_1 = -\alpha_1 \delta h_1 + \frac{\beta_1}{2} \delta u \\ \delta \dot{h}_2 = -\alpha_2 \delta h_2 + \frac{\beta_2}{2} \delta u \end{cases}$$

$$A = \begin{bmatrix} -\alpha_1 & 0 \\ 0 & -\alpha_2 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} \frac{\beta_1}{2} \\ \frac{\beta_2}{2} \end{bmatrix}$$

$$P = \left[ \begin{array}{c|c} \frac{\beta_1}{2} & -\frac{\alpha_1 \beta_1}{2} \\ \frac{\beta_2}{2} & -\frac{\alpha_2 \beta_2}{2} \end{array} \right] \quad \det(P) = -\frac{\alpha_2 \beta_1 \beta_2}{4} + \frac{\alpha_1 \beta_1 \beta_2}{4} = \frac{\beta_1 \beta_2}{4} (\alpha_1 - \alpha_2)$$

$$\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2 \neq 0$$

Il sistema linearizzato é completamente controllabile se e solo se  $\alpha_1 \neq \alpha_2$ .

### 9.1.7 Nota sul prodotto di matrici

Date due matrici  $R$  e  $C$  compatibili per il prodotto righe per colonne  $RC$ . Dividiamo le matrici in blocchi:  $R_1$  e  $R_2$  per  $R$ ;  $C_1$  e  $C_2$  per  $C$

$$\begin{bmatrix} R_1 \\ R_2 \end{bmatrix} [C_1 \quad C_2] = \begin{bmatrix} R_1 C_1 & R_1 C_2 \\ R_2 C_1 & R_2 C_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} R_1 \\ R_2 \end{bmatrix} M [C_1 \quad C_2] = \begin{bmatrix} R_1 \\ R_2 \end{bmatrix} [M C_1 \quad M C_2] = \begin{bmatrix} R_1 M C_1 & R_1 M C_2 \\ R_2 M C_1 & R_2 M C_2 \end{bmatrix}$$

oppure

$$\begin{bmatrix} R_1 \\ R_2 \end{bmatrix} M [C_1 \quad C_2] = \begin{bmatrix} M R_1 \\ M R_2 \end{bmatrix} [C_1 \quad C_2] = \begin{bmatrix} R_1 M C_1 & R_1 M C_2 \\ R_2 M C_1 & R_2 M C_2 \end{bmatrix}$$

### 9.1.8 Decomposizione canonica di raggiungibilità

Definiamo  $X_{NR} \triangleq X_R^\perp$ , cioè  $X_{NR}$  é complemento ortogonale di  $X_R$ : se  $\hat{x} \in X_R$  e  $\tilde{x} \in X_{NR}$ , allora  $\hat{x} \cdot \tilde{x} = 0$ .

Poiché il vettore nullo é ortogonale a qualunque vettore, esso é contenuto sia in  $X_R$  che in  $X_{NR}$ .

Per costruzione  $\dim(X_R) = n_x - n_R$ . Quindi se  $X_R = \mathbb{R}^{n_x}$  allora  $X_{NR} = \{0\}$ . Viceversa se  $X_{NR} = \mathbb{R}^{n_x}$ , allora  $X_R = \{0\}$ .

$X_{NR}$  non va confuso con l'insieme di tutti e soli gli stati non raggiungibili, ma é un sottospazio che definiamo artificialmente.

Se uno stato non é raggiungibile non significa che non potrà mai essere raggiunto, ma che non può essere raggiunto partendo dall'origine. Se lo stato parte fuori da  $X_R$ , potrà raggiungere stati che non appartengono a  $X_R$ .

Prendiamo per esempio il caso di  $n_x = 3$ : se  $X_R$  é una retta,  $X_{NR}$  é il piano perpendicolare; viceversa se  $X_R$  é un piano,  $X_{NR}$  é la retta perpendicolare.

Prendiamo:

- una base di  $X_R$  costituita da  $n_R = \dim(X_R)$  elementi;
- una matrice  $T_1 \in \mathbb{R}^{n_x \times n_R}$ , le cui colonne sono base di  $X_R$ ;
- una matrice  $T_2 \in \mathbb{R}^{n_x \times (n_x - n_R)}$ , le cui colonne sono una base di  $X_{NR}$ .

## 9.1. RAGGIUNGIBILITÀ E CONTROLLABILITÀ

Costruiamo una nuova matrice quadrata:

$$T = [T_1 | T_2] \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x}$$

Tutte le colonne di  $T$  sono linearmente indipendenti perché le colonne di  $T_1$  sono ortogonali alle colonne di  $T_2$ . Quindi  $T$  è invertibile.

Suddividiamo  $T^{-1}$  in due sottoblocchi:

$$T^{-1} = \begin{bmatrix} H_1 \\ H_2 \end{bmatrix}$$

Per definizione di matrice invertibile  $TT^{-1} = T^{-1}T = I$ :

$$\begin{aligned} T^{-1}T &= \begin{bmatrix} H_1 \\ H_2 \end{bmatrix} [T_1 \quad T_2] = \begin{bmatrix} H_1 T_1 & H_1 T_2 \\ H_2 T_1 & H_2 T_2 \end{bmatrix} = I = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \\ \Rightarrow & \quad H_1 T_2 = [0] \quad H_2 T_1 = [0] \end{aligned}$$

In particolare dal secondo prodotto otteniamo che le righe di  $H_2$  sono ortogonali alle colonne di  $T_1$ , quindi le righe di  $H_2$  sono ortogonali alla base di  $X_R$ :  $H_2 \perp X_R$ .

Effettuiamo il cambio di base attraverso la matrice  $T$ :

$$\begin{aligned} x = Tz &\Rightarrow \dot{z} = T^{-1}ATz + T^{-1}Bu = \tilde{A}z + \tilde{B}u \\ \tilde{A} &= \begin{bmatrix} H_1 \\ H_2 \end{bmatrix} A [T_1 \quad T_2] = \begin{bmatrix} H_1 AT_1 & H_1 AT_2 \\ H_2 AT_1 & H_2 AT_2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Concentriamoci sulla (2-1)-esima sottomatrice  $H_2 AT_1$ :  $T_1$  è una base di  $X_R$  e  $X_R$  è invariante rispetto ad  $A \Rightarrow AT_1 \in X_R \Rightarrow H_2 \perp AT_1$  perché  $H_2 \perp X_R \Rightarrow H_2 AT_1 = 0$

$$\Rightarrow \tilde{A} = \begin{bmatrix} \tilde{A}_{11} & \tilde{A}_{12} \\ 0 & \tilde{A}_{22} \end{bmatrix}$$

Invece per  $\tilde{B}$ :

$$\tilde{B} = \begin{bmatrix} H_1 \\ H_2 \end{bmatrix} B = \begin{bmatrix} H_1 B \\ H_2 B \end{bmatrix}$$

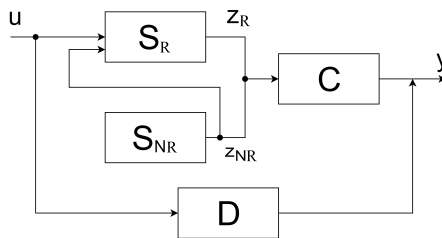
Per il teorema di Kalman le colonne di  $B$  appartengono a  $X_R$  quindi  $H_2 \perp B$

$$\Rightarrow \tilde{B} = \begin{bmatrix} H_1 B \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{B}_1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Riscriviamo il sistema che abbiamo ottenuto:

$$\begin{matrix} n_R \\ n_{NR} \end{matrix} \left\{ \begin{bmatrix} \dot{z}_R \\ \dot{z}_{NR} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{A}_{11} & \tilde{A}_{12} \\ 0 & \tilde{A}_{22} \end{bmatrix} z + \begin{bmatrix} \tilde{B}_1 \\ 0 \end{bmatrix} u \right.$$

Con questo cambiamento di base abbiamo ottenuto che le prime  $n_R$  componenti sono raggiungibili, le ultime  $n_{NR}$  non sono raggiungibili. Abbiamo messo in ordine la struttura della matrice. Strutturalmente  $z_{NR}$  è non raggiungibile perché è indipendente dal controllo, invece  $z_R$  è completamente raggiungibile.



**\* Esercizio 9**      **Calcolo di  $X_R$  e decomposizione di raggiungibilità**

Dato il sistema:

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} u = \begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1 + u \\ \dot{x}_2 = -x_2 + u \end{cases}$$

$$P = [B|AB] = \begin{bmatrix} 1 & | & -1 \\ 1 & | & -1 \end{bmatrix}$$

$$\det(P) = 0 \quad \Rightarrow \quad \text{rank}(P) = \dim(X_R) = 1$$

Infatti si può osservare che si tratta di due sistemi indipendenti tra loro, ma pilotati dallo stesso controllo: se partono dallo stesso stato si muovono in sincronia.

$$X_R = \begin{bmatrix} \alpha \\ \alpha \end{bmatrix}$$

È l'insieme degli stati per cui  $x_1 = x_2$ .

Prendiamo la matrice  $T_1$  la cui colonna sia base di  $X_R$  e la matrice  $T_2$  la cui colonna sia base di  $X_{NR}$  (cioè un vettore ortogonale a  $T_1$ ):

$$T_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad T_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Quindi effettuiamo il cambio di base attraverso la matrice  $T$ :

$$T = [T_1 \quad | \quad T_2] = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \quad T^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}^{-1} = -\frac{1}{2} \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$x = Tz \quad \Rightarrow \quad \dot{z} = \tilde{A}z + \tilde{B}u$$

$$\tilde{A} = T^{-1}AT = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{B} = T^{-1}B = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \dot{z} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} z + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u$$

Applichiamo il teorema di Kalman e calcoliamo  $\tilde{P}$ :

$$\tilde{P} = \begin{bmatrix} 1 & | & \dots \\ 0 & | & \dots \end{bmatrix}$$

Poiché  $n_R = 1$  e  $X_R$  è invariante al cambiamento di base, posso fermarmi alla prima colonna di  $\tilde{P}$ :

$$Z_R = \alpha \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

**9.1.9 Polinomio caratteristico di controllabilità**

Dato il sistema su cui è stata effettuata una decomposizione di raggiungibilità attraverso la matrice  $T$ :

$$\dot{x} = Ax + Bu \quad \xrightarrow{x=Tz} \quad \dot{z} = \tilde{A}z + \tilde{B}u$$

Consideriamo l'evoluzione forzata dello stato:

$$x_f(t) = \int_{0^-}^t e^{A(t-\tau)} Bu(\tau) d\tau \quad \xrightarrow{\mathcal{L}} \quad X_f(s) = (sI - A)^{-1} BU(s)$$

Per la linearità della trasformata di Laplace:

$$\begin{aligned} z(t) = T^{-1}x(t) &\xrightarrow{\mathcal{L}} Z(s) = T^{-1}X(s) \\ \Rightarrow Z_f(s) = (sI - \tilde{A})^{-1}\tilde{B}U(s) &= \\ &= (sT^{-1}IT - T^{-1}AT)^{-1}T^{-1}BU(s) = \\ &= (T^{-1}sIT - T^{-1}AT)^{-1}T^{-1}BU(s) = \\ &= (T^{-1}(sI - A)T)^{-1}T^{-1}BU(s) =^2 \\ &= (T^{-1}(sI - A)^{-1}T)T^{-1}BU(s) = T^{-1}X_f(s) \end{aligned}$$

Quindi studiare  $(sI - A)^{-1}BU(s)$  o  $(sI - \tilde{A})^{-1}\tilde{B}U(s)$  é equivalente a meno di un  $T^{-1}$ .

Il polinomio caratteristico (e anche il polinomio minimo) é invariante al cambio di base:

$$\varphi(s) = \tilde{\varphi}(s) \quad (m(s) = \tilde{m}(s))$$

$$\begin{aligned} \tilde{\varphi}(s) &= \det(sI - \tilde{A}) = \det(sT^{-1}IT - T^{-1}AT) = \\ &= \det(T^{-1}(sI - A)T) = \det(T^{-1})\det(sI - A)\det(T) =^3 \det(sI - A) \end{aligned}$$

Calcoliamo gli autovalori nella nuova base:

$$\begin{aligned} \varphi(s) = \tilde{\varphi}(s) &= \det(sI - \tilde{A}) = \det \left\{ s \begin{bmatrix} I_{n_R} & 0 \\ 0 & I_{n_{NR}} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \tilde{A}_{11} & \tilde{A}_{12} \\ 0 & \tilde{A}_{22} \end{bmatrix} \right\} = \begin{bmatrix} (sI - \tilde{A}_{11}) & -\tilde{A}_{12} \\ 0 & (sI - \tilde{A}_{22}) \end{bmatrix} = \\ &= \underbrace{\det(sI - \tilde{A}_{11})}_{\varphi_C(s)} \cdot \underbrace{\det(sI - \tilde{A}_{22})}_{\varphi_{NC}(s)} \end{aligned}$$

- $\varphi_C(s)$  é il **polinomio caratteristico di controllabilità**. Le radici di  $\varphi_C(s)$  sono gli autovalori di  $\tilde{A}_{11}$ , che é la parte controllabile del sistema, e sono detti **autovalori controllabili**.

$$\deg \{ \varphi_C(s) \} = n_R \triangleq \dim(X_R)$$

$$\text{sistema completamente controllabile} \Leftrightarrow \varphi_C(s) \equiv \varphi(s)$$

$$\text{sistema completamente NON controllabile} \Leftrightarrow \varphi_C(s) = 1 \quad (B = \text{matrice nulla})$$

- $\varphi_{NC}(s)$  é il **polinomio caratteristico di non controllabilità**. Le radici di  $\varphi_{NC}(s)$  sono gli autovalori di  $\tilde{A}_{22}$ , che é la parte non controllabile del sistema, e sono detti **autovalori non controllabili**.

### \* Esercizio 10 Calcolare $X_R$ e $\varphi_C(s)$

Dato il seguente sistema detto integratore:

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$\varphi(s) = \det(sI - A) = s^2$$

Per studiare la controllabilità possiamo procedere in due modi:

- Usare il teorema di Kalman che ci permette di trovare  $n_R$  e  $X_R$ :

$$P = [B|AB] = \left[ \begin{array}{c|c} 0 & 1 \\ \hline 1 & 0 \end{array} \right]$$

<sup>2</sup> $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$   
<sup>3</sup> $\det(T) \cdot \det(T^{-1}) = 1$

$$\Rightarrow \text{rank}(P) = 2 \equiv n_x$$

Il sistema é completamente controllabile quindi:

- $X_R = \mathbb{R}^2$
- $\varphi_C(s) = s^2$  e  $\varphi_{NC}(s) = 1$

- Studiare  $(sI - A)^{-1}B$  per trovare  $\varphi_C(s)$  e quindi anche  $n_R$ :

$$(sI - A)^{-1}B = \begin{bmatrix} s & -1 \\ 0 & s \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{s} & \frac{1}{s^2} \\ 0 & \frac{1}{s} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{s^2} \\ \frac{1}{s} \end{bmatrix}$$

$$\varphi_C(s) = \text{mcm}(s, s^2) = s^2$$

Poiché  $\varphi_C(s) \equiv \varphi(s)$ , il sistema é completamente controllabile:  $X_R = \mathbb{R}^2$ .

### \* Esercizio 11      Calcolare $X_R$ e $\varphi_C(s)$

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u$$

Notiamo che:

1. I termini  $(2, 1)$  di  $A$  e  $(2, 1)$  di  $B$  sono nulli, cioè la funzione é già decomposta, quindi  $x_2$  non é raggiungibile. Si deduce che  $n_R < 2$ .
2. La matrice  $B$  appartiene sempre a  $X_R$ , pertanto esiste almeno uno stato raggiungibile oltre l'origine:  $n_R > 0$ .

Da queste osservazioni ricaviamo subito che  $n_R = 1 \Rightarrow X_R = \begin{bmatrix} \alpha \\ 0 \end{bmatrix}$ .

Si può giungere allo stesso risultato pragmaticamente utilizzando il teorema di Kalman:

$$P = [B|AB] = \begin{bmatrix} 1 & | & 0 \\ 0 & | & 0 \end{bmatrix}$$

$$n_R = \text{rank}(P) = 1 \Rightarrow X_R = \alpha B = \begin{bmatrix} \alpha \\ 0 \end{bmatrix}$$

Calcoliamo il polinomio caratteristico di controllabilità:

$$\varphi(s) = \det(sI - A) = s^2 \Rightarrow \varphi_C(s) = s$$

### \* Esercizio 12      Calcolare $X_R$ e $\varphi_C(s)$

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$\varphi(s) = \det(sI - A) = \det \begin{bmatrix} s-1 & 1 \\ -1 & s+1 \end{bmatrix} = s^2 - 1 + 1 = s^2$$

Calcoliamo  $\varphi_C(s)$ :

$$(sI - A)^{-1}B = \begin{bmatrix} s-1 & 1 \\ -1 & s+1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{s^2} \begin{bmatrix} s+1 & -1 \\ 1 & s-1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{s^2} \begin{bmatrix} s \\ s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{s} \\ \frac{1}{s} \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \varphi_C(s) = mcm(s, s) = s \Rightarrow n_R = 1$$

Poiché  $n_R \equiv n_u$ ,  $X_R$  lo possiamo dedurre direttamente da  $B$ :

$$X_R = \alpha \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

### Come calcolare gli autovalori controllabili

$$\begin{aligned} (sI - \tilde{A})^{-1}\tilde{B} &= \begin{bmatrix} (sI - \tilde{A}_{11}) & -\tilde{A}_{12} \\ 0 & (sI - \tilde{A}_{22}) \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \tilde{B}_1 \\ 0 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} (sI - \tilde{A}_{11})^{-1} & M_{12}(s) \\ 0 & (sI - \tilde{A}_{22})^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{B}_1 \\ 0 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} (sI - \tilde{A}_{11})^{-1}\tilde{B}_1 \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$(sI - \tilde{A})^{-1}\tilde{B}$  non ha informazioni su  $\tilde{A}_{22}$ .

É evidente che il polinomio caratteristico associato a  $(sI - \tilde{A}_{11})\tilde{B}_1$  equivale a quello di  $(sI - \tilde{A})^{-1}\tilde{B}$ , perché le due matrici differiscono per un blocco di zeri (che non avendo un denominatore non influiscono sul polinomio caratteristico).

Si può dimostrare che il polinomio caratteristico associato a  $(sI - \tilde{A}_{11})^{-1}\tilde{B}_1$  coincide con  $\varphi_C(s) = \det(sI - \tilde{A}_{11})$ . Quindi per calcolare  $\varphi_C(s)$  é sufficiente calcolare il polinomio caratteristico associato a  $(sI - \tilde{A})^{-1}\tilde{B}$ .

Ma per **quanto già detto**, studiare  $(sI - A)^{-1}B$  equivale a studiare  $(sI - \tilde{A})^{-1}\tilde{B}$  a meno di  $T^{-1}$ . Quindi per calcolare  $\varphi_C(s)$  basta calcolare il polinomio caratteristico associato a  $(sI - A)^{-1}B$ .

## 9.2 Osservabilità e ricostruibilità

$$S: \begin{cases} \dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx + Du \end{cases}$$

Potremmo essere interessati a conoscere all'istante  $t$ , lo stato  $x(t)$  o la condizione iniziale  $x(0^-)$ , perché  $x(t)$  può avere un significato fisico. Potremmo non averne una misura diretta. Inoltre posso voler utilizzare lo stato  $x(t)$  per esempio per fare feedback. Spesso (nella pratica sempre) ci si accontenta di una stima  $\hat{x}(t)$  dello stato.

**Definizione 5.** Un sistema é completamente osservabile **se e solo se**, dati  $u(\tau)$  e  $y(\tau)$  per  $\tau \in [0, t]$ , é possibile calcolare univocamente  $x(0^-)$ .

**Definizione 6.** Un sistema é completamente ricostruibile **se e solo se**, dati  $y(\tau)$  e  $u(\tau)$  per  $\tau \in [0, t]$ , é possibile calcolare univocamente  $x(t)$ .

Poiché  $x(t)$  é sempre funzione della condizione iniziale  $x(0^-)$  e della sequenza di controllo  $u(\tau)$  con  $\tau \in [0, t]$ , se un sistema é osservabile allora sarà anche ricostruibile. Non vale necessariamente il viceversa.

Per i sistemi LTI a tempo continuo valgono entrambe le implicazioni:

un sistema LTI é osservabile  $\Leftrightarrow$  é ricostruibile.



## 9.2. OSSERVABILITÀ E RICOSTRUIBILITÀ

Per dimostrarlo partiamo dall'equazione di Lagrange da cui é evidente che  $x(t)$  dipenda da  $x(0^-)$ ,  $u(\cdot)$ :

$$x(t) = e^{At}x(0^-) + \int_{0^-}^t e^{A(t-\tau)}B u(\tau)d\tau$$

ma poiché  $e^{At}$  é sempre invertibile ( $(e^{At})^{-1} = e^{-At}$ ) otteniamo anche che la condizione iniziale  $x(0^-)$  dipende da  $x(t)$  e  $u(\cdot)$ :

$$\begin{aligned} e^{At}x(0^-) &= x(t) - \int_{0^-}^t e^{A(t-\tau)}B u(\tau)d\tau \\ x(0^-) &= e^{-At} \left[ x(t) - \int_{0^-}^t e^{A(t-\tau)}B u(\tau)d\tau \right] \end{aligned}$$

Consideriamo adesso l'uscita del sistema:

$$y(t) = \underbrace{Ce^{At}x(0^-)}_{y_l(t)} + \underbrace{\int_{0^-}^t e^{A(t-\tau)}B u(\tau)d\tau + Du(t)}_{y_f(t)}$$

Se  $A, B, C, D$  e  $u(\tau)$  per  $\tau \in [0, t]$  sono noti, allora  $y_f(t)$  é calcolabile.  $y(t)$ , essendo l'uscita del sistema, é nota perché é misurabile. Quindi possiamo calcolare  $y_l(t)$  come:

$$y_l(t) = y(t) - y_f(t)$$

D'ora in poi supporremo di lavorare con il sistema "libero", cioè il sistema in cui l'uscita  $y_l(t)$  non é influenzata dall'ingresso, come se  $u(t) \equiv 0$ .

Supponiamo:

- $\exists \tilde{x}$  tale che se  $x(0^-) = \tilde{x} \Rightarrow y_l(t) = \tilde{y}_l(t) \equiv 0$   
cioé che esista uno stato  $\tilde{x}$  che dal punto di vista dell'uscita libera sia indistinguibile dall'origine (infatti se lo stato iniziale é l'origine  $x(0^-)$ , l'uscita libera non puó che essere nulla  $y_l(t) = 0$ ).
- di avere  $x(0^-) = \hat{x} \Rightarrow y_l(t) = \hat{y}_l(t)$
- di prendere uno stato iniziale  $x(0^-) = \hat{x} + \alpha\tilde{x}$  con  $\alpha \in \mathbb{R}$

Per il principio di sovrapposizione degli effetti:

$$y_l(t) = \hat{y}_l(t) + \alpha\tilde{y}_l(t) = \hat{y}_l(t)$$

Abbiamo ottenuto che non possiamo distinguere univocamente lo stato iniziale partendo da  $y_l(t)$ .

**Definizione 7.** Definiamo  $X_{NO}$  l'insieme degli stati indistinguibili dallo stato zero:

$$X_{NO} \triangleq \{ \tilde{x} \text{ tale che } x(0^-) = \tilde{x} \Rightarrow y_l(t) = 0 \}$$

Dalla conoscenza di  $\begin{cases} u(\tau) \\ y(\tau) \end{cases} \tau \in [0, t]$  non sará possibile "osservare" univocamente  $x(0^-)$ , ma solo una variazione di  $x(0^-)$  a meno di  $X_{NO}$ .

**Proprietá di  $X_{NO}$ :**

- $X_{NO}$  é un sottospazio lineare: se  $\tilde{x}_1 \in X_{NO}$  e  $\tilde{x}_2 \in X_{NO}$ , allora  $\alpha\tilde{x}_1 + \beta\tilde{x}_2 \in X_{NO}$
- $X_{NO}$  é invariante rispetto ad  $A$ : se  $\tilde{x} \in X_{NO}$ , allora  $A\tilde{x} \in X_{NO}$

9.2.1 Teorema di Kalman di Osservabilità

$$X_{NO} \triangleq Ker\{Q\} \quad n_{NO} \triangleq dim X_{NO}$$

$$Q \triangleq \underbrace{\begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ \vdots \\ CA^{n_x-1} \end{bmatrix}}_{n_x} \Bigg\} n_x \times n_y$$

9.2.2 Corollari del teorema di Kalman

- sistema completamente osservabile  $\Leftrightarrow$   
 $\Leftrightarrow X_{NO} = Ker\{Q\} = 0 \Leftrightarrow n_{NO} = 0 \Leftrightarrow rank\{Q\} = n_x$  (ha rango massimo)
- posso applicare il teorema di Kalman di osservabilità a gruppi di uscite o a ogni singola uscita.
- sistema completamente NON osservabile  $\Leftrightarrow X_{NO} = \mathbb{R}^{n_x} \Leftrightarrow rank\{Q\} = 0 \Leftrightarrow C = [0]$  cioè l'uscita non dipende dallo stato.

**\* Esercizio 13**      **Calcolare  $X_{NO}$**

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} x + Bu \quad y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} x$$

$$Q = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 = (CA)A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$rank\{Q\} = 3 = n_x$  il rango é massimo quindi il sistema é completamente osservabile.

Consideriamo solo l'uscita  $y_1$ :

$$C_1 = [1 \ 0 \ 0] \Rightarrow Q_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$rank\{Q_1\} = 1$  quindi il sistema non é completamente osservabile da  $y_1$ . Calcoliamo  $X_{NO1}$ :

$$\tilde{x} = \begin{bmatrix} a & d \\ b & e \\ c & f \end{bmatrix} \quad \text{tale che} \quad Q_1 \tilde{x} = 0$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & d \\ b & e \\ c & f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} a & d \\ -a & -d \\ a & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow a = d = 0 \Rightarrow X_{NO} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ b & e \\ c & f \end{bmatrix}$$

Consideriamo solo  $y_2$ :

$$C_2 = [0 \ 0 \ 1] \Rightarrow Q_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$rank\{Q_2\} = 2$  quindi il sistema non é completamente osservabile da  $y_2$ . Calcoliamo  $X_{NO2}$  analogamente a prima e otteniamo:

$$X_{NO2} = Ker\{Q_2\} = \begin{bmatrix} a \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

### 9.2.3 Decomposizione canonica di osservabilità

Prendiamo una matrice  $T = [T_1|T_2]$  dove

- $T_1$  é una matrice le cui colonne sono base di  $X_{NO}$
- $T_2$  é una matrice le cui colonne sono base di  $X_O \triangleq X_{NO}^\perp$

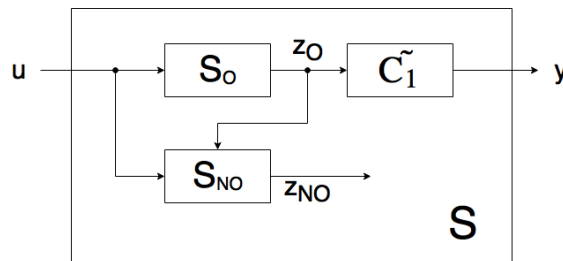
Effettuiamo il cambio di base:  $x = Tz$ :

$$\begin{cases} \dot{z} = T^{-1}ATz + T^{-1}Bu \\ y = CTz + Du \end{cases}$$

Si può dimostrare che:

$$\begin{cases} \dot{z} = \begin{bmatrix} \dot{z}_O \\ \dot{z}_{NO} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{A}_{11} & 0 \\ \tilde{A}_{21} & \tilde{A}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_O \\ z_{NO} \end{bmatrix} + Bu \\ y = \begin{bmatrix} \tilde{C}_1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_O \\ z_{NO} \end{bmatrix} + Du \end{cases}$$

dove  $z_{NO}$  é la componente dello stato non osservabile (perché non influenza  $y$  né direttamente né indirettamente attraverso  $z_O$ ), mentre  $z_O$  é la componente osservabile. Quindi sarà possibile calcolare solo  $z_O(0^-)$ .



### 9.2.4 Polinomio caratteristico di osservabilità

$$\varphi(s) = \tilde{\varphi}(s) = \underbrace{\det(sI - \tilde{A}_{11})}_{\varphi_O(s)} \cdot \underbrace{\det(sI - \tilde{A}_{22})}_{\varphi_{NO}(s)}$$

- $\varphi_O(s)$  é il polinomio caratteristico di osservabilità: ha come radici gli autovalori di  $\tilde{A}_{11}$  e sono detti autovalori osservabili.
- $\varphi_{NO}(s)$  é il polinomio caratteristico di non osservabilità: ha come radici gli autovalori di  $\tilde{A}_{22}$  e sono detti autovalori di non osservabilità.

**Come calcolare gli autovalori osservabili**

$$y_i(t) = Ce^{At}x(0^-) = \tilde{C}e^{\tilde{A}t}z(0^-)$$

trasformiamo con Laplace:

$$Y_I(s) = C(sI - A)^{-1}x(0^-) = \tilde{C}(sI - \tilde{A})^{-1}z(0^-)$$

$$\begin{aligned} \tilde{C}(sI - \tilde{A})^{-1} &= [\tilde{C}_1 \quad 0] \begin{bmatrix} sI - \tilde{A}_{11} & 0 \\ -\tilde{A}_{21} & sI - \tilde{A}_{22} \end{bmatrix}^{-1} = \\ [\tilde{C}_1 \quad 0] \begin{bmatrix} (sI - \tilde{A}_{11})^{-1} & 0 \\ -\tilde{A}_{21} & (sI - \tilde{A}_{22})^{-1} \end{bmatrix} &= [\tilde{C}_1(sI - \tilde{A}_{11})^{-1} \quad 0] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow Y_I(s) &= [\tilde{C}_1(sI - \tilde{A}_{11})^{-1} \quad 0] \begin{bmatrix} z_O \\ z_{NO} \end{bmatrix} = \\ &= \tilde{C}_1(sI - \tilde{A}_{11})^{-1}z_O(0^-) + 0 \cdot z_{NO}(0^-) = \end{aligned}$$

ma per quanto detto prima

$$= C(sI - A)^{-1}x(0^-)$$

Gli autovalori osservabili sono quelli che caratterizzano, con la loro molteplicità, tutte le possibili uscite (i modi di evoluzione dell'uscita) al variare di  $x(0^-)$ .  $\varphi_O(s)$  può essere ottenuto come polinomio caratteristico associato a  $\tilde{C}(sI - \tilde{A})^{-1}$  o equivalentemente a  $C(sI - A)^{-1}$ . (Un discorso analogo vale per il polinomio minimo  $m_O(s) \subseteq \cdot \varphi_O(s)$ ).

sistema completamente osservabile  $\Leftrightarrow \partial \text{deg} \{ \varphi_O(s) \} = n_x$  cioè se  $\varphi_O(s) \equiv \varphi(s)$

### 9.2.5 Studio dell'osservabilità

- Utilizzando il teorema di Kalman si trovano  $X_{NO}$  e  $n_O = n_x - \dim(X_{NO})$
- Studiando  $C(sI - A)^{-1}$  si ottengono  $\varphi_O(s)$  e  $\partial \text{deg} \{ \varphi_O(s) \}$

Entrambi i metodi hanno in comune:

$$n_O = \dim(X_O) = n_x - \dim(X_{NO}) = \partial \text{deg} \{ \varphi_O(s) \}$$

#### Esercizio 14 Studiare l'osservabilità di due vasche in parallelo

Consideriamo la linearizzazione del sistema attorno a un punto di equilibrio:

$$\begin{cases} \dot{x} = \begin{bmatrix} -\alpha_1 & 0 \\ 0 & -\alpha_2 \end{bmatrix} x + Bu \\ y = S_1 x_1 + S_2 x_2 \end{cases}$$

- $\alpha_1 = \frac{E_1}{2S_1} \sqrt{\frac{2g}{\bar{h}_1}}$       $\alpha_2 = \frac{E_2}{2S_2} \sqrt{\frac{2g}{\bar{h}_2}}$
- $x_1 \triangleq h_1 - \bar{h}_1$       $x_2 \triangleq h_2 - \bar{h}_2$   
rappresenta la variazione di altezza del volume d'acqua nella vasca rispetto il livello del punto di equilibrio. È una quantità che possiamo conoscere ad esempio misurandola con un galleggiante.
- $y$  è la somma delle variazioni di volume delle vasche rispetto al loro punto di equilibrio. Anch'essa è una quantità misurabile per esempio con una bilancia sotto le due vasche.

Studiamo l'osservabilità del sistema, cioè se è possibile ricavare il volume di ciascuna vasca partendo dal volume totale.

**Metodo con teorema di Kalman**

$$Q = \begin{bmatrix} S_1 & S_2 \\ -\alpha_1 S_1 & -\alpha_2 S_2 \end{bmatrix}$$

$$\det \{Q\} = -\alpha_2 S_1 S_2 + \alpha_1 S_1 S_2 = S_1 S_2 (\alpha_1 - \alpha_2)$$

- se  $\alpha_1 \neq \alpha_2$  il sistema é osservabile posso risalire al volume delle vasche partendo dal modo di evoluzione dell'uscita  $y$ .
- se  $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha$  il sistema non é osservabile.

In quest'ultimo caso calcoliamo  $X_{NO}$ :

$$\begin{aligned} \tilde{x} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \in X_{NO} &\Leftrightarrow \begin{bmatrix} S_1 & S_2 \\ -\alpha_1 S_1 & -\alpha_2 S_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ \Rightarrow a S_1 + b S_2 = 0 &\Rightarrow b = -\frac{S_1}{S_2} a \Rightarrow X_{NO} = \begin{bmatrix} a \\ -\frac{S_1}{S_2} a \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Significa che se il sistema si trova nella situazione in cui:

- il livello della prima vasca é  $\bar{h} + a$ ;
- il livello della seconda vasca é  $\bar{h} - \frac{S_1}{S_2} a$ ;
- applichiamo il controllo  $\bar{u}$  del punto di equilibrio

e misuriamo il volume delle due vasche attraverso la "bilancia", otteniamo un valore costante ( $y_l = 0$ ), anche se lo stato del sistema sta variando.

**Metodo con polinomio caratteristico**

$$C(sI - A)^{-1} = [S_1 \quad S_2] \begin{bmatrix} \frac{1}{s + \alpha_1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{s + \alpha_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{S_1}{s + \alpha_1} & \frac{S_2}{s + \alpha_2} \end{bmatrix}$$

$$\varphi_O(s) = mcm \{(s + \alpha_1), (s + \alpha_2)\} = \begin{cases} (s + \alpha) & \text{se } \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha \\ (s + \alpha_1)(s + \alpha_2) & \text{se } \alpha_1 \neq \alpha_2 \end{cases}$$

Calcoliamo la trasformata di Laplace dell'uscita:

$$Y(s) = C(sI - A)^{-1} x(0^-) = \frac{S_1}{s + \alpha_1} x_1(0^-) + \frac{S_2}{s + \alpha_2} x_2(0^-)$$

$$y(t) = S_1 x_1(0^-) e^{-\alpha_1 t} + S_2 x_2(0^-) e^{-\alpha_2 t}$$

Nel caso non osservabile  $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha$ :

$$Y(s) = [S_1 x_1(0^-) + S_2 x_2(0^-)] \frac{1}{s + \alpha}$$

$$y(t) = [S_1 x_1(0^-) + S_2 x_2(0^-)] e^{-\alpha t}$$

Poiché il sistema non é osservabile non possiamo ottenere  $x_1(0^-)$  e  $x_2(0^-)$  separatamente, ma solo  $[S_1 x_1(0^-) + S_2 x_2(0^-)]$ .

**Sistema con due uscite** Consideriamo adesso il caso in cui abbiamo due misure:

$$\begin{cases} y_1 = x_1 \\ y_2 = x_2 \end{cases} \Rightarrow C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Si vede subito che il sistema é completamente osservabile perché lo stato coincide con le uscite, ma si può ricavare rigorosamente con il teorema di Kalman: basta osservare che  $\text{rank}\{C\} = 2 = n_x$ .

La trasformata dell'uscita nel caso  $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha$  é:

$$Y(s) = C(sI - A)^{-1}x(0^-) = \begin{bmatrix} \frac{1}{s + \alpha} & 0 \\ 0 & \frac{1}{s + \alpha} \end{bmatrix} x(0^-) = \begin{bmatrix} \frac{1}{s + \alpha} x_1(0^-) \\ \frac{1}{s + \alpha} x_2(0^-) \end{bmatrix}$$

$$\varphi_O(s) = \text{mcm}\{(s + \alpha), (s + \alpha), (s + \alpha)^2\} = (s + \alpha)^2$$

Nonostante abbiamo un solo autovalore  $s = \alpha$  con molteplicitá 2, il sistema é comunque osservabile, grazie al fatto che si hanno due uscite.

### 9.3 Decomposizione completa di Kalman

É un metodo per separare tutte le diverse parti del sistema in tutte le possibili combinazioni:

- controllabile e osservabile
- controllabile e non osservabile
- non controllabile e osservabile
- non controllabile e non osservabile

Definiamo 4 sottospazi:

- $X_1 \triangleq X_R \cap X_{NO}$ . Poiché  $X_R$  e  $X_{NO}$  sono invarianti rispetto ad  $A$ , per come é definito anche  $X_1$  lo sará;
- $X_2$  tale che  $X_1 \oplus^4 X_2 = X_R$
- $X_3$  tale che  $X_1 \oplus X_3 = X_{NO}$
- $X_4$  tale che  $X_4 \oplus (X_R + X_{NO}) = R^{n_x}$

$X_1$  é l'unico sottospazio definito univocamente, mentre una possibile scelta di  $X_2, X_3, X_4$  é:

- $X_2 = X_R \cap X_1^\perp = X_R \cap (X_R \cap X_{NO})^\perp = X_R \cap (X_R^\perp + X_{NO}^\perp) = X_R \cap (X_{NR} + X_O)$
- $X_3 = X_{NO} \cap X_1^\perp = \dots = X_{NO} \cap (X_{NR} + X_O)$
- $X_4 = (X_R + X_{NO})^\perp = X_R^\perp \cap X_{NO}^\perp = X_{NR} \cap X_O$

Se la dimensione di qualche  $X_i$  é nulla (cioé contiene solo l'origine), la  $T_i$  corrispondente sparisce dalla matrice  $T$ . Se invece  $\dim X_j = n_x$ , cioé la dimensione é massima, allora  $T \equiv T_j$ . Prendiamo una matrice  $T \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x}$  tale che:

$$T = [T_1|T_2|T_3|T_4]$$

<sup>4</sup> $\oplus$  somma diretta: corrisponde al completamento a base, cioé gli elementi di  $X_1$  e  $X_2$  devono essere linearmente indipendenti

$T_1, T_2, T_3, T_4$  sono matrici le cui colonne sono rispettivamente base di  $X_1, X_2, X_3, X_4$ .

Effettuiamo il cambio di base:  $x = Tz$

$$\begin{aligned} \dot{z} &= \begin{bmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \\ \dot{z}_3 \\ \dot{z}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{A}_{11} & \tilde{A}_{12} & \tilde{A}_{13} & \tilde{A}_{14} \\ 0 & \tilde{A}_{22} & 0 & \tilde{A}_{24} \\ 0 & 0 & \tilde{A}_{33} & \tilde{A}_{34} \\ 0 & 0 & 0 & \tilde{A}_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \tilde{B}_1 \\ \tilde{B}_2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \underline{u} \\ y &= \begin{bmatrix} 0 \\ \tilde{C}_2 \\ 0 \\ \tilde{C}_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \end{bmatrix} + D\underline{u} \end{aligned}$$

- $z_3$  e  $z_4$  non sono influenzate da  $\underline{u}$  direttamente né indirettamente, quindi formano la parte non raggiungibile del sistema;
- $z_1$  e  $z_2$  non influenzano  $y$  né direttamente né indirettamente quindi costituiscono la parte non osservabile del sistema.

### 9.3.1 Polinomio caratteristico

La matrice  $\tilde{A}$  è triangolare a blocchi, i quali a loro volta sono triangolari, quindi gli autovalori sono gli elementi della diagonale:

$$\begin{aligned} & \text{aut}(\tilde{A}_{11}) \cup \text{aut}(\tilde{A}_{22}) \cup \text{aut}(\tilde{A}_{33}) \cup \text{aut}(\tilde{A}_{44}) \\ \varphi(s) = \tilde{\varphi}(s) &= \underbrace{\det(sI - \tilde{A}_{11})}_{\varphi_{C,NO}(s)} \cdot \underbrace{\det(sI - \tilde{A}_{22})}_{\varphi_{C,O}(s)} \cdot \underbrace{\det(sI - \tilde{A}_{33})}_{\varphi_{NC,NO}(s)} \cdot \underbrace{\det(sI - \tilde{A}_{44})}_{\varphi_{NC,O}(s)} \end{aligned}$$

### 9.3.2 Matrice di trasferimento

La matrice di trasferimento non viene modificata dal cambiamento di base:

$$\begin{aligned} T(s) = \tilde{T}(s) &\Rightarrow C(sI - A)^{-1}B + D = \tilde{C}(sI - \tilde{A})^{-1}\tilde{B} + D \\ \tilde{T}(s) &= \tilde{C} \begin{bmatrix} (sI - \tilde{A}_{11}) & -\tilde{A}_{12} & -\tilde{A}_{13} & -\tilde{A}_{14} \\ 0 & (sI - \tilde{A}_{22}) & 0 & -\tilde{A}_{24} \\ 0 & 0 & (sI - \tilde{A}_{33}) & -\tilde{A}_{34} \\ 0 & 0 & 0 & -\tilde{A}_{44} \end{bmatrix} \tilde{B} + D \\ [0 \ \tilde{C}_2 \ 0 \ \tilde{C}_4] &\begin{bmatrix} (sI - \tilde{A}_{11})^{-1} & * & * & * \\ 0 & (sI - \tilde{A}_{22})^{-1} & * & * \\ 0 & 0 & (sI - \tilde{A}_{33}) & * \\ 0 & 0 & 0 & -\tilde{A}_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{B}_1 \\ \tilde{B}_2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + D \\ &\Rightarrow \tilde{T}(s) = \tilde{C}_2(sI - \tilde{A}_{22})^{-1}\tilde{B}_2 + D \end{aligned}$$

dipende da tutti e soli gli autovalori controllabili e osservabili. Allora  $\varphi_{C,O}(s)$  è il polinomio caratteristico associato alla matrice  $\tilde{T}(s)$ , ma per quanto detto prima  $T(s) = \tilde{T}(s)$ . Quindi  $\varphi_{C,O}(s)$  è il polinomio caratteristico associato alla matrice  $T(s) = C(sI - A)^{-1}B + D$  (o indifferentemente associato a  $C(sI - A)^{-1}B$  perché  $D$  è una matrice numerica e non modifica  $\varphi_{C,O}(s)$ ).

Per i sistemi SISO,  $T(s)$  è scalare, quindi  $\varphi_{C,O}(s)$  coincide con il denominatore di  $T(s)$ .

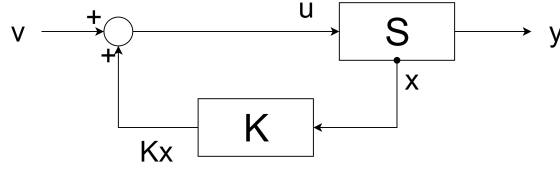
## 9.4 Retroazione algebrica sullo stato

Dato uno sistema:

$$S: \begin{cases} \dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx + Du \end{cases}$$

É possibile modificare gli autovalori della matrice  $A$  dello stato, attraverso una retroazione  $u = Kx + v$  dove  $K \in \mathbb{R}^{n_u \times n_x}$ :

$$S^* : \begin{cases} \dot{x} &= Ax + B(Kx + v) = (A + BK)x + Bv = A^*x + Bv \\ y &= Cx + D(Kx + v) = (C + DK)x + Dv = \end{cases}$$



Effettuiamo la decomposizione di Kalman di raggiungibilit :

$$x = Tz \quad T = [T_1 | T_2]$$

$$\tilde{S} : \begin{cases} \dot{z} &= \tilde{A}z + \tilde{B}u \\ y &= \tilde{C}z + \tilde{D}u \end{cases}$$

La retroazione nella nuova base diventa:

$$u = KTz + v = \tilde{K}z + v$$

Quindi il sistema decomposto con la retroazione sullo stato  :

$$\tilde{S}^* : \begin{cases} \dot{z} &= (\tilde{A} + \tilde{B}\tilde{K})z + \tilde{B}v = \tilde{A}^*z + \tilde{B}v \\ y &= \tilde{C}^*z + \tilde{D}u \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \tilde{A}^* &= \tilde{A} + \tilde{B}\tilde{K} = \begin{bmatrix} \tilde{A}_{11} & \tilde{A}_{12} \\ 0 & \tilde{A}_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \tilde{B}_1 \\ 0 \end{bmatrix} K [T_1 | T_2] = \\ &= \begin{bmatrix} \tilde{A}_{11} & \tilde{A}_{12} \\ 0 & \tilde{A}_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \tilde{B}_1 K T_1 & \tilde{B}_1 K T_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} \tilde{A}_{11} + \tilde{B}_1 K T_1 & \tilde{A}_{12} + \tilde{B}_1 K T_2 \\ 0 & \tilde{A}_{22} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Il polinomio caratteristico diventa:

$$\begin{aligned} \varphi^* &= \det(sI - A^*) = \tilde{\varphi}^* = \det(sI - \tilde{A}^*) = \\ &= \det \left[ sI - (\tilde{A}_{11} + \tilde{B}_1 K T_1) \right] \cdot \underbrace{\det(sI - \tilde{A}_{22})}_{\varphi_{NC}} \end{aligned}$$

### 9.4.1 Propriet 

- Ho verificato che la retroazione algebrica sullo stato non modifica  $\varphi_{NC}(s)$ ;
- $\varphi_C(s)$  viene modificata dalla retroazione algebrica su  $x$ ;
- la retroazione algebrica sullo stato non modifica le propriet  di controllabilit   $X_R = X_R^*$ : ad esempio se il sistema   completamente controllabile, anche dopo la retroazione lo sar ;
- la retroazione algebrica sullo stato pu  modificare le propriet  di osservabilit  (in peggio o in meglio);

<sup>5</sup> Notazione:

- $\tilde{\phantom{x}}$  indica le matrici relative al sistema ottenuto tramite la decomposizione di Kalman di raggiungibilit .
- $^*$  indica le matrici relative a un sistema con la retroazione sullo stato.



- $\varphi_C(s)$  può essere **assegnato a piacere** con una retroazione algebrica sullo stato  $x$ , cioè è possibile scegliere  $K$  tale che  $\det [sI - (\tilde{A}_{11} + \tilde{B}_1 K T_1)]$  abbia autovalori arbitrari.

**Definizione 8.** Definiamo **autovalori controllabili** tutti e soli gli autovalori assegnabili a piacere con retroazione algebrica sullo stato.

#### Retroazione su stato che modifica l'osservabilità in peggio

$$\begin{cases} \dot{x} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \\ y = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} x \end{cases}$$

Studiamo l'osservabilità:

$$Q = \begin{bmatrix} C \\ CA \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

il sistema è completamente osservabile perché il rango di  $Q$  è massimo:  $\text{rank}(Q) = 2$ .

Effettuiamo una retroazione sullo stato  $u = Kx + v$  con  $K = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ :

$$(A + BK) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Studiamo l'osservabilità nel sistema retroazionato:

$$Q^* = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$\text{rank}(Q^*) = 1$  quindi abbiamo perso osservabilità.

#### Retroazione su stato che modifica l'osservabilità in peggio

$$\begin{cases} \dot{x} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} u \\ y = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} x \end{cases}$$

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \text{il sistema è completamente osservabile}$$

Effettuiamo la retroazione sullo stato  $u = kx + v$  con  $K = [0 \quad 1]$

$$A^* = (A + BK) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} [0 \quad 1] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$Q^* = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \text{rank}(Q^*) = 1$$

anche in questo caso abbiamo perso osservabilità.

#### Retroazione su stato che modifica l'osservabilità in meglio

$$\begin{cases} \dot{x} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} u \\ y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x \end{cases}$$

Studiamo l'osservabilità:

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

il sistema non é completamente osservabile. Applichiamo quindi una retroazione algebrica sullo stato:  $u = Kx + v$

$$A^* = A + BK = A + IK = A + K$$

Potendo scegliere a piacere gli elementi di  $K$ , sommiamo ad  $A$ , una costante arbitraria. Per esempio:  $K \triangleq \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

$$A^* = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow Q^* = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Il rango di  $Q^*$  é massimo quindi il sistema retroazionato é completamente osservabile.

### Retroazione su stato che modifica l'osservabilità in meglio

$$\begin{cases} \dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u \\ y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x \end{cases}$$

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Il sistema non é completamente osservabile. Applichiamo la retroazione sullo stato e scegliamo:  $K \triangleq [0 \ 1]$ , cioè  $u = x_2 + v$ . Prima  $x_1$  dipendeva solo da  $u$ , ma non da  $x_2$ , mentre adesso  $x_2$  dipende da  $x_1$ , perché  $u$  dipende da  $x_1$ .

$$A^* = A + BK = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} [0 \ 1] = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow Q^* = \begin{bmatrix} C \\ CA^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

il rango di  $Q^*$  é 2, allora il sistema é completamente osservabile.

## 9.4.2 Sistema stabilizzabile

Un sistema é **stabilizzabile** (cioé é possibile renderlo asintoticamente stabile) se e solo se la sua parte non controllabile é asintoticamente stabile ( $\Leftrightarrow$  gli autovalori di  $\varphi_{NC}(s)$  sono tutti a  $\Re < 0$ ).

## 9.4.3 Esercizi

### \*\*\* Esercizio 15 Studio completo del sistema e stabilizzazione

$$\begin{cases} \dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} u & n_x = 3 \\ y = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} x & n_u = 2 \\ & n_y = 2 \end{cases}$$

**Stabilità** Per calcolare gli autovalori del sistema possiamo procedere in due modi:

1. notiamo che  $A$  é una matrice triangolare a blocchi:  $[0]$  e  $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ , dove il secondo blocco é a sua volta triangolare. Quindi gli autovalori sono gli elementi della diagonale:  $0, -1, 0$ .

2.

$$\varphi(s) = \det(sI - A) = \det \begin{bmatrix} s & 0 & -1 \\ 0 & s+1 & 0 \\ 0 & -1 & s \end{bmatrix} = s^2(s+1)$$

$$\text{Gli autovalori sono: } \begin{cases} s_{1,2} = 0 \\ s_3 = -1 \end{cases}$$

Poiché un autovalore ha  $\Re = 0$ , il sistema non sarà asintoticamente stabile. Per determinare il tipo di stabilità dobbiamo studiare il polinomio minimo  $m(s)$ . Si possono seguire più strade:

- Sappiamo che  $m(s) \subseteq \varphi(s)$ , quindi i possibili polinomi minimi sono:  $s^2(s+1)$  e  $s(s+1)$ . Inoltre  $m(s)$  deve essere polinomio annullante per  $A$ , quindi possiamo trovare quale dei due é quello corretto verificando questa proprietà: se  $A(A+I) = 0$ , allora  $m(s) = s(s+1)$ , se invece  $A^2(A+I) = 0$ , allora  $m(s) = s^2(s+1)$ .
- calcolandolo attraverso  $(sI - A)^{-1}$ :

$$(sI - A)^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{s} & \frac{1}{s^2(s+1)} & \frac{s+1}{s^2(s+1)} \\ 0 & \frac{1}{s+1} & 0 \\ 0 & \frac{s}{s^2(s+1)} & \frac{1}{s} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{s} & \frac{1}{s^2(s+1)} & \frac{1}{s^2} \\ 0 & \frac{1}{s+1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{s(s+1)} & \frac{1}{s} \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow m(s) = mcm \{s, s^2, s(s+1), s^2(s+1), (s+1)\} = s^2(s+1)$$

Poiché  $m(s)$  ha una radice a  $\Re = 0$  con molteplicitá 2, il sistema é instabile.

### Raggiungibilitá/Controllabilitá

$$(sI - A)^{-1}B = \begin{bmatrix} \frac{1}{s} & \frac{1}{s^2(s+1)} & \frac{1}{s^2} \\ 0 & \frac{1}{s+1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{s(s+1)} & \frac{1}{s} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{s^2} & \frac{1}{s} \\ 0 & 0 \\ \frac{1}{s} & 0 \end{bmatrix}$$

$$\varphi_C(s) = s^2 \quad \varphi_{NC}(s) = s+1$$

Quindi  $s_{1,2} = 0$  sono gli autovalori controllabili, mentre  $s_3 = -1$  é l'unico autovalore non controllabile. Si poteva già intuire dalla seconda equazione del sistema  $\dot{x} = -x_2$ , a cui era associato l'autovalore  $s_3$ . Infatti la componente  $x_2$  dello stato é indipendente dalle altre componenti e non dipende dal controllo.

$$n_R = \deg \{\varphi_C(s)\} = 2 \equiv n_u \quad \Rightarrow \quad X_R = B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

**Stabilizzazione** La parte non controllabile é già stabile, quindi con una retroazione sullo stato  $u = Kx + v$  é possibile rendere il sistema asintoticamente stabile.

$$\begin{aligned}
 S^* : \dot{x} &= (A + BK)x + Bv = A^*x + B^*u \\
 x : 3 \times 1 \quad u : 2 \times 1 &\Rightarrow K : 2 \times 3 \\
 A^* = (A + BK) &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} \end{bmatrix} = \\
 &= \begin{bmatrix} k_{21} & k_{22} & k_{23} \\ 0 & 0 & 0 \\ k_{11} & k_{12} & k_{13} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{21} & k_{22} & 1 + k_{23} \\ 0 & -1 & 0 \\ k_{11} & 1 + k_{12} & k_{13} \end{bmatrix} \\
 B^* \equiv B &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

É evidente che il sistema non é completamente controllabile, perché la seconda componente dello stato non dipende dal controllo e dalle altre componenti dello stato:  $\dot{x}_2 = x_2$ . Infatti le proprietà di controllabilità non cambiano con retroazioni algebriche sullo stato.

Calcoliamo il nuovo polinomio caratteristico:

$$\begin{aligned}
 \varphi^*(s) &= \det(sI - A^*) = \\
 &= \det \begin{bmatrix} s - K_{21} & -K_{22} & -(1 + K_{23}) \\ 0 & s + 1 & 0 \\ -K_{11} & -(1 + K_{12}) & s - K_{13} \end{bmatrix} = \\
 &= (s + 1) [(s - K_{21})(s - K_{13}) - K_{11}(1 + K_{23})] = \\
 &= (s + 1) [s^2 - (K_{21} + K_{13})s + K_{21}K_{13} - K_{11}(1 + K_{23})]
 \end{aligned}$$

La retroazione assegna tutti e soli gli autovalori controllabili: infatti  $(s + 1)$ , la parte non controllabile é rimasta tale. Posso imporre che il polinomio sia equivalente a qualunque polinomio monico di secondo grado:

$$s^2 - (K_{21} + K_{13})s + K_{21}K_{13} - K_{11}(1 + K_{23}) = s^2 + bs + c \quad \text{con } b, c \in \mathbb{R}$$

$$\begin{cases} -(K_{21} + K_{13}) = b \\ K_{21}K_{13} - K_{11}(1 + K_{23}) = c \end{cases}$$

Prima scegliamo  $K_{21}$  e  $K_{13}$  in modo che sia verificata la prima equazione. Quindi possiamo scegliere  $K_{11}$  e  $K_{23}$  in modo che anche la seconda equazione sia verificata:  $K_{11}(1 + K_{23}) = c - K_{21}K_{13}$ .

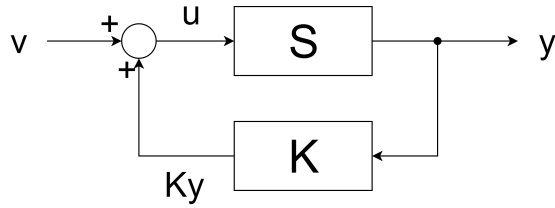
## 9.5 Retroazione algebrica sull'uscita

Consideriamo il sistema  $S$  dove dall'uscita eliminiamo il termine  $Du$  per evitare i possibili loop algebrici che si avrebbero con una retroazione:

$$S : \begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx \end{cases}$$

Effettuiamo la retroazione  $u = Ky + v$ :

$$S^* : \begin{cases} \dot{x} = Ax + B(Ky + v) = (A + BKC)x + Bv = A^*x + Bv \\ y = Cx \end{cases}$$



Si può osservare che:

- la retroazione appena effettuata é simile alla retroazione algebrica sullo stato  $u = \hat{K}x + v$ : infatti la retroazione algebrica sull'uscita é una particolare retroazione algebrica sullo stato, ma con piú vincoli.
- la retroazione algebrica sullo stato non modifica le proprietá di raggiungibilitá.

Grazie a queste due proprietá otteniamo che:

La retroazione algebrica sull'uscita NON modifica le proprietá di controllabilitá del sistema

Analogamente per l'osservabilitá:

La retroazione algebrica sull'uscita NON modifica le proprietá di osservabilitá del sistema

**Dimostriamo** quest'ultima proprietá: supponiamo che  $\hat{x} \in X_{NO}^*$  cioé che  $\hat{x}$  sia indistinguibile dallo stato zero dopo la retroazione, dove

$$X_{NO}^* = \ker(Q^*) = \ker \begin{bmatrix} C \\ CA^* \\ C(A^*)^2 \\ \vdots \\ C(A^*)^{n_x-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C \\ C(A+BKC) \\ C(A+BKC)^2 \\ \vdots \\ C(A+BKC)^{n_x-1} \end{bmatrix}$$

quindi per definizione di kernel  $Q^* \hat{x} = 0$ :

$$\begin{bmatrix} C \\ C(A+BKC) \\ C(A+BKC)^2 \\ \vdots \\ C(A+BKC)^{n_x-1} \end{bmatrix} \hat{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

effettuiamo il conto riga per riga:

1.  $C\hat{x} = 0$
2.  $C(A+BKC)\hat{x} = CA\hat{x} + CBK \underbrace{C\hat{x}}_{=0} = 0 \Rightarrow CA\hat{x} = 0$
3.  $C(A+BKC)^2\hat{x} = C(A^2 + ABKC + BKCA + BKCBKC)\hat{x} = CA^2\hat{x} + ABK \underbrace{C\hat{x}}_{=0} + BK \underbrace{CA\hat{x}}_{=0} + BKCBK \underbrace{C\hat{x}}_{=0} = CA^2\hat{x}$
4. ...
- n.  $CA^{n_x-1}\hat{x} = 0$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n_x-1} \end{bmatrix} \hat{x} = Q\hat{x} = \hat{x} = 0 \Rightarrow \hat{x} \in \ker(Q) = X_{NO}$$

c.v.d.

### 9.5.1 Polinomio caratteristico

Supponiamo di effettuare la decomposizione di Kalman al sistema retroazionato:

$$\tilde{S}^* : \begin{cases} \dot{z} = (\tilde{A} + \tilde{B}K\tilde{C})z + \tilde{B}v = \tilde{A}^*z + \tilde{v} \\ y = \tilde{C}z \end{cases}$$

$$\tilde{B}K\tilde{C} = \begin{bmatrix} \tilde{B}_1 \\ \tilde{B}_2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} K \begin{bmatrix} 0 \\ \tilde{C}_2 \\ 0 \\ \tilde{C}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \tilde{B}_1K\tilde{C}_2 & 0 & \tilde{B}_1K\tilde{C}_4 \\ 0 & \tilde{B}_2K\tilde{C}_2 & 0 & \tilde{B}_2K\tilde{C}_4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{A}^* = \begin{bmatrix} \tilde{A}_{11} & (\tilde{A}_{12} + \tilde{B}_1K\tilde{C}_2) & \tilde{A}_{13} & (\tilde{A}_{14} + \tilde{B}_1K\tilde{C}_4) \\ 0 & (\tilde{A}_{22} + \tilde{B}_2K\tilde{C}_2) & 0 & (\tilde{A}_{24} + \tilde{B}_2K\tilde{C}_4) \\ 0 & 0 & \tilde{A}_{33} & \tilde{A}_{34} \\ 0 & 0 & 0 & \tilde{A}_{44} \end{bmatrix}$$

$\varphi^*(s)$  é il polinomio caratteristico associato a  $A + BKC$ .  $\tilde{\varphi}^*(s)$  é il polinomio caratteristico del sistema retroazionato decomposto con Kalman, associato a  $\tilde{A} + \tilde{B}K\tilde{C}$ . Nonostante ciò il polinomio caratteristico é invariante ai cambiamenti di base:

$$\varphi^*(s) = \tilde{\varphi}^*(s)$$

Inoltre la matrice  $\tilde{A}^*$  ha mantenuto la struttura triangolare a blocchi:

$$\varphi^*(s) = \tilde{\varphi}^*(s) = \det(sI - \tilde{A}_{11}) \cdot \det[sI - (\tilde{A}_{22} + \tilde{B}_2K\tilde{C}_2)] \cdot \det(sI - \tilde{A}_{33}) \cdot \det(sI - \tilde{A}_{44})$$

Rispetto a quanto avevamo trovato nella [decomposizione di Kalman](#), solo il secondo fattore é stato modificato dalla retroazione:

La retroazione algebrica sull'uscita può modificare (non sempre a piacere) solo la parte controllabile e osservabile del sistema.

Vengono "modificati" e non "assegnati a piacere" gli autovalori controllabili e osservabili a causa del vincolo imposto dalla matrice  $C$ . Se  $rank(C) = n_x$  allora la retroazione sull'uscita equivale alla retroazione algebrica sullo stato.

#### \* Esercizio 16 Retroazione algebrica sull'uscita

$$\begin{cases} \dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \\ y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x \end{cases}$$

Il sistema ha  $n_x = 2$ , ma la retroazione sull'uscita é  $u = Ky + v$  con  $K \in \mathbb{R}$  (scalare): é evidente che con la sola variabile  $K$  non posso fissare entrambi gli autovalori del sistema.

Studiamo velocemente il sistema:

$$\bullet \quad (sI - A)^{-1} = \begin{bmatrix} s & -1 \\ 0 & s \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{s} & \frac{1}{s^2} \\ 0 & \frac{1}{s} \end{bmatrix} \Rightarrow \varphi(s) = mcm\{s, s, s^2\} = s^2$$

- poiché  $m(s) \subseteq \cdot\varphi(s)$ , i possibili polinomi minimi sono:  $s$  e  $s^2$ . Verifichiamo se  $s$  é polinomio annullante per  $A$ , cioè  $m(A) = 0$ . Tuttavia  $A \neq 0$ ,  $A$  non é una matrice nulla, quindi significa che  $m(s) = s^2$  (infatti  $A^2 = 0$ ).
- l'unica radice di  $m(s)$  é a  $\Re = 0$  con molteplicitá 2 quindi il sistema é instabile.

- controllabilità:

$$(sI - A)^{-1}B = \begin{bmatrix} \frac{1}{s} & \frac{1}{s^2} \\ 0 & \frac{1}{s} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{s^2} \\ \frac{1}{s} \end{bmatrix}$$

Trucchetto: se nella matrice compare un denominatore di grado massimo, allora esso sarà il polinomio caratteristico:  $\varphi_C(s) = s^2$ . Inoltre  $\varphi_C(s) \equiv m_C(s)$ .

Oppure col teorema di Kalman:

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Il sistema é completamente controllabile.

- osservabilità:

$$C(sI - A)^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{s} & \frac{1}{s^2} \end{bmatrix} \Rightarrow \varphi_O(s) = s^2$$

oppure

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

il sistema é completamente osservabile.

1. É possibile rendere il sistema asintoticamente stabile con una retroazione algebrica sull'uscita?

Per vedere ciò calcoliamo il polinomio caratteristico del sistema retroazionato:

$$A^* = (A + BKC) \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} K \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ K & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ K & 0 \end{bmatrix}$$

$$\varphi^*(s) = \det(sI - A^*) = \det \begin{bmatrix} s & -1 \\ -K & s \end{bmatrix} = s^2 - K$$

per  $K \geq 0$  il sistema resta instabile, mentre per  $K < 0$  é semplicemente stabile.

2. Con la retroazione é possibile assegnare a piacere qualche autovalore? Sí purché i coefficienti del polinomio che vogliamo ottenere siano reali.

### 9.5.2 Stabilità BIBO

$$\text{stabilità BIBO} \Rightarrow \varphi_{CO}(s) \text{ non ha radici a } \Re \geq 0$$

$\varphi_{CO}(s)$  é il polinomio caratteristico associato a  $T(s)$  prima della retroazione. Se si può calcolare  $T^*(s) = T_{yv}(s)$  (dopo la retroazione), allora  $\varphi_{CO}^*(s)$  sarà il polinomio caratteristico associato a  $T^*(s)$ .

#### Esercizio 17 Studio retr. alg. sull'uscita con l'algebra dei blocchi

Riprendiamo l'esercizio precedente e calcoliamo la funzione di trasferimento:

$$C(sI - A)^{-1}B + D = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{s} & \frac{1}{s^2} \\ 0 & \frac{1}{s} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{s^2} \\ \frac{1}{s} \end{bmatrix} = \frac{1}{s^2}$$

Applichiamo la retroazione algebrica sull'uscita:

$$T_{yv}(s) = \frac{\frac{1}{s^2}}{1 - K \frac{1}{s^2}} = \frac{\frac{1}{s^2}}{\frac{s^2 - K}{s^2}} = \frac{1}{s^2 - K}$$

$$\Rightarrow \varphi_{CO}^*(s) = s^2 - K$$

Abbiamo ottenuto molto piú facilmente lo stesso risultato di prima.

**\* Esercizio 18 Studio stabilitá BIBO dopo retroazione sull'uscita**

$$T(s) = \frac{1}{s(s-1)}$$

si tratta di un sistema non stabile BIBO perché i poli di  $T(s)$  sono 0 e 1 (una radice ha  $\Re > 0$ ). Con la retroazione sull'uscita si può rendere il sistema stabile BIBO?

$$T^*(s) = \frac{1}{1 - \frac{K}{s(s-1)}} = \frac{1}{s^2 - s - K}$$

$\exists K$  tale che i poli di  $T^*(s)$  siano tutti a  $\Re < 0$ ?

Con la regola di Cartesio si trova subito una variazione (tra  $s^2$  e  $-s$ ) che determina la presenza di almeno una radice a  $\Re > 0$ . Quindi il sistema retroazionato non é stabile BIBO per nessun  $K$ . Analizziamo comunque i casi al variare di  $K$ :

- $K < 0$ : due variazioni  $\Rightarrow$  due radici a  $\Re > 0$
- $K > 0$ : una variazione  $\Rightarrow$  una radice a  $\Re > 0$  e una radice a  $\Re < 0$
- $K = 0$ : una radice a  $\Re > 0$  e una radice a  $\Re = 0$

## 9.6 Dualità

Prendiamo due sistemi diversi:

$$S : \begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx \end{cases} \quad \hat{S} : \begin{cases} \dot{\hat{x}} = \hat{A}\hat{x} + \hat{B}\hat{u} \\ \hat{y} = \hat{C}\hat{x} \end{cases}$$

dove:

$$\begin{aligned} \hat{A} &= A^T & \hat{B} &= C^T & \hat{C} &= B^T \\ \Rightarrow n_{\hat{y}} &= n_u & n_{\hat{u}} &= n_y & n_{\hat{x}} &= n_x \end{aligned}$$

Due sistemi sono **duali** se le proprietá di controllabilitá/osservabilitá di  $\hat{S}$  corrispondono **rispettivamente** a quelle di osservabilitá/controllabilitá di  $S$ .

Si dimostra con il teorema di Kalman:

$$\hat{P} = [\hat{A} \mid \hat{A}\hat{B} \mid \dots \mid \hat{A}^{n_x-1}\hat{B}] = \begin{bmatrix} C^T & A^T C^T & \dots & \underbrace{A^T \dots A^T}_{n_x-1 \text{ volte}} C^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n_x-1} \end{bmatrix} = Q^T$$

Analogamente si ottiene che  $\hat{Q} = P^T$ .

Le matrici  $P$  e  $Q$  vengono solamente trasposte, quindi i ranghi non vengono modificati.

Poiché  $\hat{A} = A^T$ , gli autovalori non cambiano:  $\varphi(s) = \hat{\varphi}(s)$ . Inoltre per la relazione che lega  $\hat{B}$  con  $\hat{C}$ :

$$\varphi_C(s) = \hat{\varphi}_O(s) \quad \varphi_O(s) = \hat{\varphi}_C(s) \quad \varphi_{CO}(s) = \hat{\varphi}_{CO}(s)$$



La matrice di trasferimento:

$$\begin{aligned}\hat{T}(s) &= \hat{C}(sI - \hat{A})^{-1}\hat{B} = B^T(sI - A^T)^{-1}C^T = \\ &= [B^T(sI - A)^{-1}]^T C^T = [C(sI - A)^{-1}B]^T = T^T(s)\end{aligned}$$

# Capitolo 10

## Rappresentazione dei sistemi lineari

### 10.1 Descrizione di un sistema

Un sistema può essere descritto in diversi modi:

- equazione differenziale lineare a coefficienti costanti
- matrice di trasferimento (che descrive solamente la relazione tra ingresso e uscita)
- equazione di stato

Finora abbiamo studiato come ottenere la matrice di trasferimento partendo o dall'equazione differenziale o dall'equazione di stato.

### 10.2 Controllabilità/osservabilità e l'equazione differenziale

$$A(D)y(t) = B(D)u(t)$$

Trasformando con Laplace si ottiene:

$$Y(s) = Y_f(s) + Y_l(s) = T(s)U(s) + Y_l(s) = \frac{\bar{B}(s)}{\bar{A}(s)}U(s) + \frac{I(s)}{A(s)}U(s)$$

Per i sistemi causali  $I(s)$  è un qualsiasi polinomio di grado  $< n = \text{deg}\{A(s)\}$ . Quindi in  $Y_l(s)$  possono essere presenti tutti i modi di evoluzione del sistema con le loro molteplicità  $\Rightarrow$  tutti i modi di evoluzione del sistema sono osservabili.

Allora un'equazione differenziale lineare a coefficienti costanti è **sempre** completamente osservabile perché  $\varphi(s) = \varphi_O(s) = A(s)$ .

Un sistema descritto in questo modo è completamente controllabile se  $\varphi_C = \varphi(s) = A(s)$ , ma essendo sempre osservabile, deve valere anche  $\varphi_{CO}(s) = \varphi(s) = A(s)$ . Poiché  $\varphi_{CO}(s)$  è il polinomio caratteristico associato a  $T(s) = \bar{B}(s)/\bar{A}(s)$  per sistemi SISO, allora  $\varphi_{CO}(s) = \bar{A}(s)$ .

Eventuali semplificazioni tra  $A(s)$  e  $B(s)$  corrispondono a perdite di controllabilità:

$$\begin{aligned} B(s) &= \bar{B}(s) \cdot P(s) \\ A(s) &= \underbrace{\bar{A}(s)}_C \cdot \underbrace{P(s)}_{NC} \end{aligned}$$

dove  $\bar{A}(s)$  e  $\bar{B}(s)$  sono coprimi.

Quindi un sistema è completamente controllabile quando:

$$A(s) = \bar{A}(s)$$

Riepilogo:

- $\varphi(s) = A(s)$
- $\varphi_{C,NO}(s) = \varphi_{NC,NO}(s) = 1$  perché il sistema é completamente osservabile.
- $\varphi_{CO}(s) = \bar{A}(s)$
- $\varphi_{NC,O}(s) = P(s)$

## 10.3 Realizzazione

Si tratta del problema di trovare, data  $T(s)$ ,  $A, B, C, D$  tali che  $T(s) = C(sI - A)^{-1}B + D$ .

Il problema della realizzazione non ha soluzione unica per i seguenti motivi:

- possibili cambi di base: se  $A, B, C, D$  sono una realizzazione di  $T(s)$ , allora anche  $T^{-1}AT, T^{-1}B, CT, D$  lo sono  $\forall T \in \mathbb{R}^{n \times n}$  invertibile.
- possibile aggiunta di parti non controllabili o non osservabili, dato che la funzione di trasferimento é influenzata solo dalla parte controllabile e osservabile.

### Esempio

$$T(s) = \frac{1}{s^2}$$

é un sistema strettamente proprio perché  $\partial_{eg} \{\text{num}\} < \partial_{eg} \{\text{denom}\} \Rightarrow D = 0$  (non c'è dipendenza istantanea tra ingresso e uscita).

Consideriamo diversi sistemi e verifichiamo se sono realizzazioni di  $T(s)$ :

•

$$S : \begin{cases} \dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \\ y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x \end{cases}$$

Il sistema  $S$  é una realizzazione di  $T(s)$ ? Verifichiamolo:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{s} & \frac{1}{s^2} \\ 0 & \frac{1}{s} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{s^2}$$

- effettuiamo un cambio di base attraverso la matrice  $T = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ , che inverte il ruolo degli stati:

$$\begin{cases} \dot{z} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} z + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u \\ y = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} z \end{cases}$$

la funzione di trasferimento non cambia:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{s} & 0 \\ 1 & \frac{1}{s} \\ s^2 & s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{s^2}$$

•

$$S : \begin{cases} \dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 9 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} u \\ y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \sqrt{17} \end{bmatrix} x \end{cases}$$

Si nota che  $x_3$  non dipende da  $x_1$  e  $x_2$  e dal controllo, quindi costituisce la parte non controllabile:

$$\varphi(s) = s^2(s - \sqrt{2}) \quad \text{dove} \quad \sqrt{2} \text{ é l'autovalore non controllabile}$$

Se svolgiamo i calcoli otteniamo sempre:

$$T(s) = \dots = \frac{1}{s^2}$$

## 10.4 Realizzazione minima

Si vuole che la realizzazione sia la piú compatta possibile. Si sceglie quindi:

$$n_x = \text{deg}\{\text{denominatore di } T(s)\} = \text{numero autovalori controllabili e osservabili}$$

Una realizzazione minima é sempre completamente controllabile & osservabile. Allora una qualsiasi realizzazione non minima non puó essere completamente controllabile & osservabile.

Tutte le realizzazioni minime di una  $T(s)$  sono in relazione tra loro mediante un opportuno cambio di base.

### 10.4.1 Forma Compagna Controllabile

Data la funzione di trasferimento di un sistema fisicamente realizzabile:

$$T(s) = \frac{b_n s^n + b_{n-1} s^{n-1} + \dots + b_0}{s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0} \quad \begin{array}{l} \text{deg}\{Num\} \leq n \\ \text{deg}\{Denom\} = n \end{array}$$

la forma compagna controllabile é:

$$\begin{cases} \dot{\underline{x}} = A_C \underline{x} + B_C u \\ y = C_C \underline{x} + D_C u \end{cases}$$

$$\dot{\underline{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \dots & -a_{n-1} \end{bmatrix} \underline{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$y = [\tilde{b}_0 \quad \tilde{b}_1 \quad \dots \quad \tilde{b}_{n-1}] \underline{x} + b_n u$$

Come calcolare i  $\tilde{b}_i$ ?

$$T(s) = \frac{\bar{B}(s)}{\bar{A}(s)} = \frac{\begin{array}{cccc|c} b_n s^n & +b_{n-1} s^{n-1} & + \dots & +b_0 & s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0 \\ b_n s^n & +a_{n-1} b_n s^{n-1} & + \dots & +a_0 b_n & b_n \\ 0 & +(b_{n-1} - a_{n-1} b_n) s^{n-1} & + \dots & +(b_0 - a_0 b_n) & \end{array}}{b_n}$$

$$\Rightarrow T(s) = b_n + \frac{(b_{n-1} - a_{n-1} b_n) s^{n-1} + \dots + (b_0 - a_0 b_n)}{s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_0} = b_n + \frac{\tilde{b}_{n-1} s^{n-1} + \dots + \tilde{b}_1 s + \tilde{b}_0}{s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_0} = b_n + \tilde{T}(s)$$

dove i coefficienti del resto della divisione sono  $\tilde{b}_i \triangleq b_i - a_i b_n$

$$Y_f(s) = T(s)U(s) \Rightarrow y_f(t) = b_n u(t) + \dots$$

$b_n$  rappresenta la dipendenza istantanea tra l'ingresso e l'uscita.

La forma compagna controllabile é una realizzazione minima di  $T(s)$ .

\* **Esercizio 19**      **Calcolare la forma compagna controllabile**

$$T(s) = \frac{s^2 - 1}{s^2 + 2s + 3} \Rightarrow n = \deg\{\text{Denom}\}$$

Si può calcolare la FCC seguendo due strade:

- calcolandosi gli elementi delle matrici con le formule:

$$\begin{array}{l} a_0 = 3 \quad b_0 = -1 \\ a_1 = 2 \quad b_1 = 0 \\ \quad \quad b_2 = 1 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} \tilde{b}_0 = b_0 - a_0 b_2 = -4 \\ \tilde{b}_1 = b_1 - a_1 b_2 = -2 \end{array}$$

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -3 & -2 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$y = [-4 \quad -2] x + u$$

otteniamo lo stesso risultato:  $\tilde{b}_0 = -4, \tilde{b}_1 = -2$

- eseguendo la divisione tra polinomi:

$$\begin{array}{r|l} s^2 & -1 \\ s^2 & +2s + 3 \\ \hline 0 & -2s - 4 \end{array} \left| \begin{array}{l} s^2 + 2s + 3 \\ 1 \end{array} \right.$$

**10.4.2 Forma Compagna Osservabile**

$$\Rightarrow \text{FCO} \quad \begin{cases} \dot{z} = A_C^T z + C_C^T u = A_O x + B_O u \\ y = B_C^T z + D_C u = C_O x + D_O u \end{cases}$$

La forma compagna osservabile é il **sistema duale** della forma compagna controllabile.

$$\begin{aligned} \dot{\underline{x}} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & -a_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & -a_{n-1} \end{bmatrix} \underline{x} + \begin{bmatrix} \tilde{b}_0 \\ \tilde{b}_1 \\ \tilde{b}_2 \\ \vdots \\ \tilde{b}_{n-1} \end{bmatrix} u \\ y &= [0 \quad 0 \quad \dots \quad 0 \quad 1] \underline{x} + b_n u \end{aligned}$$

**Esempio** integratore

$$T(s) = \frac{1}{s} \Rightarrow n = 1 \quad a_0 = 0 \quad \begin{array}{l} b_0 = 1 \\ b_1 = 0 \end{array}$$

Quando la  $T(s)$  é strettamente propria  $\Rightarrow \tilde{b}_i \equiv b_i$  perché  $b_n = 0$ .

$$\begin{cases} \dot{x} = [-a_0]x + [b_0]u \\ y = [1]x + b_n u \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{x} = u \\ y = x \end{cases}$$

**Esempio**

$$T(s) = \frac{3}{s+2} = \frac{s+2-2-3}{s+2} = 1 + \frac{-5}{s+2}$$

$$\begin{cases} \dot{x} = -2x + u \\ y = -5x + u \end{cases}$$

**10.4.3 Proprietá di FCC e FCO**

•

$$A_C = A_O^T = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \dots & -a_{n-1} \end{bmatrix} \Rightarrow \varphi(s) = s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \dots + a_0$$

FCC e FCO non servono solo a realizzare una funzione di trasferimento, ma sono utilizzabili anche per "assegnazione di autovalori".

**Esempio** voglio ottenere gli autovalori  $s_1 = 0, s_2 = -1, s_3 = 1$ , cioè

$$\varphi(s) = s(s+1)(s-1) = s(s^2-1) = s^3 - s$$

La forma compagna controllabile di questo sistema sarebbe:

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

- Supponiamo sia dato un sistema qualsiasi in FCC (non é detto che sia ottenuto da una  $T(s)$ ) al quale applichiamo il teorema di Kalman di controllabilitá:

$$P_C = [B|AB|\dots|A^{n_x-1}B] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & 0 & 1 & \dots & * \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 1 & * & \dots & * \\ 1 & -a_{n_x-1} & * & * & \dots & * \end{bmatrix}$$

Poiché le colonne sono tutte linearmente indipendenti (qualunque valore ci sia al posto degli asterischi), il rango é massimo:  $\text{rank}\{P_C\} = n_x$ . La coppia  $(A_C, B_C)$  é sempre completamente controllabile. Se  $\text{deg}\{\varphi_{CO}(s)\} < n_x$ , allora si ha perdita di osservabilitá.

- Un sistema in FCO é sempre completamente osservabile. Se  $\text{deg}\{\varphi_{CO}(s)\} < n_x$ , allora si ha perdita di controllabilitá.
- Se si usano FCC o FCO per una realizzazione minima di una  $T(s)$ , il risultato é sempre completamente controllabile & osservabile.

Quindi se avessimo un sistema descritto attraverso un'equazione differenziale lineare di ordine  $n$  a coefficienti costanti (il sistema sarebbe completamente osservabile. vedi 10.2), potremmo scrivere la  $T(s)$ , semplificare i fattori comuni tra  $A(s)$  e  $B(s)$  e scrivere la FCC o la FCO. Cosí facendo, però, metteremmo in equazione di stato solo la parte controllabile & osservabile del sistema, ma non consideriamo il resto (la parte controllabile persa durante le semplificazioni). In base a  $P(s)$  (i fattori in comune tra  $A(s)$  e  $B(s)$ ) conviene utilizzare una forma compagna rispetto all'altra per :

- se  $P(s) = 1$ , il sistema é completamente controllabile & osservabile, quindi é indifferente usare FCC o FCO.
- se  $P(s) \neq 1$ , cioè ci sono semplificazioni tra numeratore e denominatore della  $T(s)$  che corrispondono a perdite di controllabilitá, bisogna usare la FCO (perché l'equazione differenziale é sempre completamente osservabile).

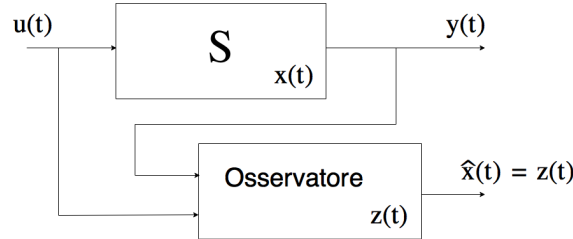
## 10.5 Osservatore asintotico dello stato

$\forall u(\cdot), \forall \underline{x}(0^-), \forall \underline{z}(0^-)$ , il sistema *Osservatore* é definito **osservatore asintotico** se:

$$\underline{x}(t) - \hat{\underline{x}}(t) \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} 0$$

Consideriamo i sistemi:

$$S : \begin{cases} \dot{\underline{x}} = A\underline{x} + B\underline{u} \\ \underline{y} = C\underline{x} \end{cases} \quad \text{Osservatore} : \begin{cases} \dot{\underline{z}} = \hat{A}\underline{z} + \hat{B}\underline{u} + L\underline{y} \\ \hat{\underline{x}} = \underline{z} \end{cases}$$



$A, B, C$  note e  $x(0^-)$  incognito, dobbiamo determinare  $\hat{A}, \hat{B}, L$ , tale che l'errore di stima  $\underline{e}(t)$ :

$$\underline{e}(t) \triangleq \underline{x}(t) - \hat{\underline{x}}(t) \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} 0$$

Studiamo come evolve l'errore:

$$\begin{aligned} \dot{\underline{e}}(t) &= \dot{\underline{x}}(t) - \dot{\hat{\underline{x}}}(t) = A\underline{x}(t) + B\underline{u}(t) - [\hat{A}\underline{z}(t) + \hat{B}\underline{u}(t) + L\underline{y}(t)] = \\ &= A\underline{x}(t) + B\underline{u}(t) - \underline{z}(t) - \hat{B}\underline{u}(t) - LC\underline{x}(t) = \end{aligned}$$

Scelgo  $\hat{B} = B \quad \hat{A} = A - LC$

$$= (A - LC) [\underline{x}(t) - \underline{z}(t)] = (A - LC)\underline{e}(t)$$

$\underline{e}(t)$  evolve come lo stato di un sistema autonomo lineare con matrice  $(A - LC)$ . Se  $L$  é tale che sia asintoticamente stabile (tutti gli autovalori a  $\Re < 0$ ), si ottiene un osservatore asintotico.

Avevamo visto (nella retroazione algebrica sullo stato), che se la coppia di matrici  $(A, B)$  é completamente controllabile, posso scegliere  $K$  tale che  $(A + BK)$  ha autovalori a piacere. Sfrutto la dualit : se  $(C, A)$ , é completamente osservabile, cio  il sistema  $S$  é completamente osservabile

$$S : \begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx \end{cases}$$

allora il suo sistema duale é completamente controllabile

$$\dot{w} = A^T w + C^T v q = B^T w$$

autovalori di  $(A^T + C^T K)$  sono assegnabili a piacere con la scelta di  $K$ .

Quindi se scegliamo  $L = -K^T$ , allora  $(A - LC)^T = (A + K^T C)^T = A^T + C^T K$ , cio  assegniamo  $L$  in modo che gli autovalori osservabili siano assegnabili a piacere in  $(A - LC)$ .

**Definizione 9.** Un sistema é *detettabile* se e solo se gli autovalori osservabili sono tutti a  $\Re < 0$ . Quindi se un sistema é *detettabile*, é possibile costruire un osservatore asintotico.

**Osservatore deterministico e non deterministico (stocastico)** La caratterizzazione tra un osservatore *deterministico* e *non deterministico* é del tutto generale. É evidente che la velocit  di convergenza dell'osservatore di stato pu  essere modificata agendo sulla matrice  $L$ .

Tipicamente viene associato a questo tipo di osservatore il nome di *Osservatore di Luenberger* o di osservatore deterministico per distinguerlo dall'osservatore non deterministico detto *Filtro di Kalman*. In realt  entrambi i tipi di osservatore hanno la medesima struttura e si differenziano solo per la scelta della matrice  $L$ :

- nel caso deterministico la scelta é legata esclusivamente alla velocit  di convergenza della stima;
- nel caso non deterministico la scelta é influenzata dall'incertezza sulla misura di  $\underline{u}(t)$  e  $\underline{y}(t)$ .

10.5.1 Osservatore di Luenberger

$$\begin{cases} \dot{z} = Az + Bu + L(y - Cz) \\ \hat{x} = z \end{cases}$$

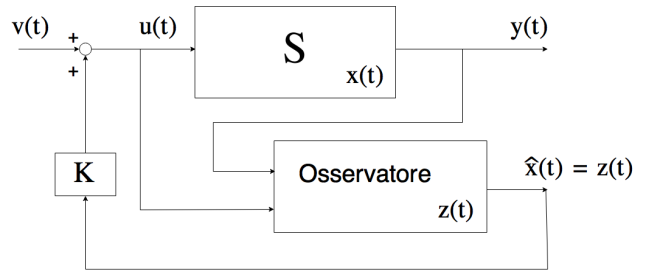
Se  $L$  é tale che  $(A - LC)$  é asintoticamente stabile, allora si tratta di un osservatore asintotico.

$\hat{y} = Cz = C\hat{x}$  é una stima di  $y$  se uso  $z = \hat{x}$ , come stima di  $x$ :

$$\begin{cases} \dot{z} = Az + Bu + L(y - \hat{y}) \\ \hat{x} = z \\ \hat{y} = Cz \end{cases}$$

10.5.2 Osservatore per controllo

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx \\ \dot{z} = Az + Bu + L(y - Cz) \\ u = Kz + v \end{cases}$$



Cambio  $z$  con  $e = x - z$ :

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + B[K(x - e) + v] = (A + BK)x - BKe + Bv \\ \dot{e} = (A - LC)e \\ y = Cx \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{e} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A + BK & -BK \\ 0 & A - LC \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ e \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix} v \quad y = [C \quad 0] \begin{bmatrix} x \\ e \end{bmatrix}$$

$$\dot{x} = \underbrace{(A + BK)x + Bv}_{\text{come se facessi retroazione su } x, \text{ non sulla stima}} - \underbrace{BKe}_{\text{errore dovuto alla stima dello stato}}$$

Se il sistema é completamente controllabile e osservabile, posso scegliere  $L$  tale che  $(A - LC)$  sia asintoticamente stabile (cioé che l'osservatore sia asintotico) e  $K$  tale che  $(A + BK)$  sia asintoticamente stabile (progetto di retroazione sullo stato).

Quindi per i sistemi lineari vale il **principio di separazione**: osservatore e regolatore possono essere progettati separatamente.

**\* Esercizio 20 Stabilizzazione di un sistema con osservatore**

$$T(s) = \frac{1}{s^2}$$

Abbiamo visto che si tratta di un sistema instabile e che non può essere stabilizzato con una retroazione algebrica sull'uscita. Proviamo quindi a stabilizzarlo con un osservatore asintotico.

Realizziamo il sistema con la FCC:

$$n = 2 \quad \begin{matrix} a_0 = 0 & b_0 = 1 \\ a_1 = 0 & b_1 = 0 \\ & b_2 = 0 \end{matrix}$$



$$S : \begin{cases} \dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \\ y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x \end{cases}$$

Progettiamo il regolatore:

$$u = Kz + v \quad K = [K_1 \quad K_2]$$

$$(A + BK) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} [K_1 \quad K_2] = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ K_1 & K_2 \end{bmatrix}$$

$$\varphi_{A+BK}(s) = \det \begin{bmatrix} s & -1 \\ -K_1 & s - K_2 \end{bmatrix} = s^2 - K_2s - K_1$$

Se voglio entrambi gli autovalori in  $-1$ :

$$\varphi_{A+BK}(s) = s^2 + 2s + 1 \quad \Leftrightarrow \quad K_1 = -1 \quad K_2 = -2$$

Progettiamo l'osservatore:

$$\begin{cases} \dot{z} = Az + Bu + L(y - Cz) \\ \hat{x} = z \end{cases}$$

$L = \begin{bmatrix} l_1 \\ l_2 \end{bmatrix}$  tale che  $(A - LC)$  sia asintoticamente stabile.

$$A - LC = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} l_1 \\ l_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -l_1 & 1 \\ -l_2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \det [sI - (A - LC)] &= \det \begin{bmatrix} s + l_1 & -1 \\ l_2 & s \end{bmatrix} = s^2 + l_1s + l_2 \\ &\Rightarrow \quad l_1 = 2 \quad l_2 = 1 \end{aligned}$$

# Capitolo 11

## Sistemi interconnessi

### 11.1 Sistemi e sottosistemi

Il sistema  $S$  é costituito da  $N$  sottosistemi  $S^{(i)}$  con  $i = 1 \dots N$ , ognuno con il suo vettore  $\underline{x}^{(i)}$ .

vettore degli ingressi esogeni	vettore degli uscite
$\underline{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_{n_u} \end{bmatrix}$	$\underline{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_{n_y} \end{bmatrix}$
vettore degli ingressi di $S^{(i)}$	vettore degli uscite di $S^{(i)}$
$\underline{u}^{(i)} = \begin{bmatrix} u_1^{(i)} \\ \vdots \\ u_{n_u}^{(i)} \end{bmatrix}$	$\underline{y}^{(i)} = \begin{bmatrix} y_1^{(i)} \\ \vdots \\ y_{n_y}^{(i)} \end{bmatrix}$

### 11.2 Studio delle proprietá strutturali

1. Mettere in equazione di stato ogni singolo sistema  $S^{(i)}$  con realizzazione minima

$$S^{(i)} : \begin{cases} \dot{\underline{x}}^{(i)} = A^{(i)}\underline{x}^{(i)} + B^{(i)}\underline{u}^{(i)} \\ \underline{y}^{(i)} = C^{(i)}\underline{x}^{(i)} + D^{(i)}\underline{u}^{(i)} \end{cases}$$

2. Scrivo le equazioni di interconnessione, cioé esprimo  $\underline{u}^{(i)}$  e  $\underline{y}^{(i)}$  come funzione (combinazione lineare) di tutte le uscite  $\underline{y}^{(i)}$  e di tutti gli ingressi esogeni  $\underline{u}$ .
3. Per sostituzioni successive, elimino le dipendenze da  $\underline{u}^{(i)}$  e da  $\underline{y}^{(i)}$ . Otteniamo un sistema lineare:

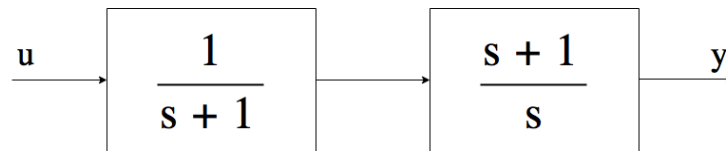
$$\begin{cases} \dot{\underline{x}} = A\underline{x} + B\underline{u} \\ \underline{y} = C\underline{x} + D\underline{u} \end{cases}$$

NB: non devono essere presenti loop algebrici, altrimenti questo passaggio non ha fine.

4. Studio delle proprietá strutturali (Controllabilitá, Osservabilitá, Stabilitá) del sistema di equazioni di stato cosí ottenuto

#### Esempio

$$\begin{aligned} T^{(1)}(s) = \frac{1}{s+1} &\Rightarrow \varphi_{CO}^{(1)}(s) = s+1 \\ T^{(2)}(s) = \frac{s+1}{s} &\Rightarrow \varphi_{CO}^{(2)}(s) = s \end{aligned}$$



Si tratta di un sistema di ordine 2. Eseguiamo tutti i passaggi:

1.

$$S^{(1)} : \begin{cases} \dot{x}^{(1)} = -x^{(1)} + u^{(1)} \\ y^{(1)} = x^{(1)} \end{cases} \quad S^{(2)} : \begin{cases} \dot{x}^{(2)} = u^{(2)} \\ y^{(2)} = x^{(2)} + u^{(2)} \end{cases}$$

2.

$$u^{(1)} = u \quad u^{(2)} = y^{(1)} \quad y = y^{(2)}$$

3.

$$\begin{aligned} \dot{x}^{(1)} &= -x^{(1)} + u \\ y^{(1)} &= x^{(1)} \\ \dot{x}^{(2)} &= y^{(1)} = x^{(1)} \\ y^{(2)} &= x^{(2)} + y^{(1)} = x^{(2)} + x^{(1)} \\ y &= y^{(2)} = x^{(2)} + u^{(2)} = x^{(2)} + y^{(1)} = x^{(2)} + x^{(1)} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow S : \begin{cases} \dot{\underline{x}} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \underline{x} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u \\ y = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \underline{x} \end{cases}$$

4.

$$\varphi(s) = \det(sI - A) = \det \begin{bmatrix} s+1 & 0 \\ -1 & s \end{bmatrix} = s(s+1) \quad m(s) \equiv \varphi(s) \text{ perché } m(s) \subseteq \cdot \varphi(s)$$

Il sistema é semplicemente stabile perché c'è un autovalore a  $\Re = 0$  e uno a  $\Re < 0$

$$P = \begin{bmatrix} 1 & | & -1 \\ 0 & | & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \text{rank}(P) = 2$$

Il sistema é completamente controllabile.

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \text{rank}(Q) = 1$$

Il sistema NON é completamente osservabile.

$$(sI - A)^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{s+1} & 0 \\ \frac{1}{s(s+1)} & \frac{1}{s} \end{bmatrix}$$

$$(sI - A)^{-1}B = \begin{bmatrix} \frac{1}{s+1} \\ \frac{1}{s(s+1)} \end{bmatrix} \Rightarrow \varphi_C(s) = s(s+1)$$

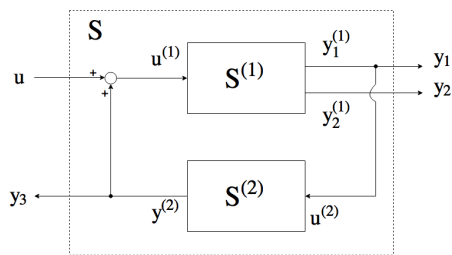
$$C(sI - A)^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{s+1} + \frac{1}{s(s+1)} & \frac{1}{s} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{s} & \frac{1}{s} \end{bmatrix} \Rightarrow \varphi_O(s) = s$$

## \*\*\* Esercizio 21 Studiare proprietà di sistemi interconnessi

Sono dati i sistemi  $S^{(1)}$  e  $S^{(2)}$ :

$$S^{(1)} : \begin{cases} \dot{\underline{x}}^{(1)} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \underline{x}^{(1)} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u^{(1)} \\ y^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \underline{x}^{(1)} \end{cases}$$

$$S^{(2)} : T(s)^{(2)} = \frac{1}{s+1}$$



Sono due sistemi strettamente propri quindi non ci sono loop algebrici. Metto in equazione di stato il secondo sistema:

$$S^{(2)} : \begin{cases} \dot{x}^{(2)} = -x^{(2)} + u^{(2)} \\ y^{(2)} = x^{(2)} \end{cases}$$

1.

$$\begin{aligned} \dot{x}_1^{(1)} &= x_2^{(1)} \\ \dot{x}_2^{(1)} &= -x_1^{(1)} + 2x_2^{(1)} + u^{(1)} \\ y_1^{(1)} &= x_1^{(1)} + x_2^{(1)} \\ y_2^{(1)} &= x_2^{(1)} \end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned} u^{(1)} &= y^{(2)} + u \\ u^{(2)} &= y_1^{(1)} \\ y_1 &= y_1^{(1)} \\ y_2 &= y_2^{(1)} \\ y_3 &= y^{(2)} \end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned} \dot{x}_2^{(1)} &= -x_1^{(1)} + 2x_2^{(1)} + y^{(2)} + u = -x_1^{(1)} + 2x_2^{(1)} + x^{(2)} + u \\ \dot{x}^{(2)} &= -x^{(2)} + y_1^{(1)} = -x^{(2)} + x_1^{(1)} + x_2^{(1)} \\ y_1 &= x_1^{(1)} + x_2^{(1)} \\ y_2 &= x_2^{(1)} \\ y_3 &= x^{(2)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dot{\underline{x}} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \underline{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} u \\ \underline{y} &= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \underline{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u \end{aligned}$$

4. • Controllabilità:

$$P = \begin{bmatrix} 0 & | & 1 & | & 2 \\ 1 & | & 2 & | & 4 \\ 0 & | & 1 & | & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \text{rank}(P) = 2$$

- Osservabilità:

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \dots & & \end{bmatrix}$$

Poiché già  $\text{rank}(C) = 3$ , il sistema é completamente osservabile.

Calcoliamo completamente  $Q$  per studiare l'osservabilità da ogni singola uscita:

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \hline -1 & 3 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ \hline -2 & 6 & 2 \\ -1 & 4 & 1 \\ -2 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

Le prime righe di ogni sottomatrice non sono linearmente indipendenti, quindi il sistema non é completamente osservabile da  $y_1$ .

Le seconde righe di ogni sottomatrice non sono linearmente indipendenti, quindi il sistema non é completamente osservabile da  $y_2$ .

Le terze righe di ogni sottomatrice sono linearmente indipendenti (bisogna calcolare tutti i minori), quindi il sistema non é completamente osservabile da  $y_3$ .

- Stabilità:

$$\begin{aligned} \varphi(s) &= \det \begin{bmatrix} s & -1 & 0 \\ 1 & s-2 & -1 \\ -1 & -1 & s+1 \end{bmatrix} = \\ &= (-s-1) + (s+1)(s^2-2s+1) = (s+1)(s^2-2s+1-1) = (s+1)s(s-2) \end{aligned}$$

poiché  $m(s) \subseteq \varphi(s)$ , allora  $m(s) \equiv \varphi(s)$ . Il sistema é instabile.

- Stabilità BIBO:

se nella matrice di trasferimento scomparissero gli autovalori 0 e +2, sarebbe stabile BIBO, cioè se  $\varphi_{CO}(s) = \frac{1}{s+1}$  o  $\varphi_{CO}(s) = 1$ . Ma abbiamo trovato che  $\partial \text{deg} \{\varphi_C(s)\} = 2$  e  $\partial \text{deg} \{\varphi_O(s)\} = 3$ , quindi  $\partial \text{deg} \{\varphi_{CO}(s)\} = 2$  (é l'intersezione dei gradi  $\varphi_C(s)$  e  $\varphi_O(s)$ ), cioè conterrà almeno uno di quei due autovalori (0 o +2). Il sistema é instabile BIBO.

Molte delle proprietà strutturali possono essere desunte sfruttando relazioni note tra i polinomi.

### Esempio

$$T(s) = \frac{1}{s^2}$$

- Stabilità BIBO:  
non é stabile perché c'è una radice a  $\Re = 0$

- Stabilità:

$$\varphi_{CO}(s) = s^2 \equiv m_{CO}(s)$$

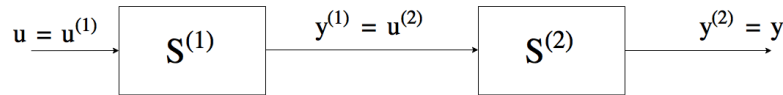
- $\varphi_{CO}(s) \subseteq \varphi(s)$  ( $s^2 \subseteq \varphi(s)$ ) allora  $\varphi(s)$  avrà una radice a  $\Re = 0$ . Il sistema non può essere asintoticamente stabile.
- $m_{CO}(s) \subseteq m(s)$  ( $s^2 \subseteq m(s)$ ) allora  $m(s)$  ha una radice a  $\Re = 0$  con molteplicità 2. Il sistema è instabile.

### 11.3 Sistemi serie/parallelo

Il polinomio caratteristico di polinomi connessi unicamente serie e/o parallelo è dato dal prodotto dei singoli polinomi caratteristici.

**Dimostrazione serie**

$$S^{(1)} : \begin{cases} \dot{x}^{(1)} = A^{(1)}x^{(1)} + B^{(1)}u^{(1)} \\ y^{(1)} = C^{(1)}x^{(1)} + D^{(1)}u^{(1)} \end{cases} \quad S^{(2)} : \begin{cases} \dot{x}^{(2)} = A^{(2)}x^{(2)} + B^{(2)}u^{(2)} \\ y^{(2)} = C^{(2)}x^{(2)} + D^{(2)}u^{(2)} \end{cases}$$



Le equazioni di interconnessione sono:

$$u^{(2)} = y^{(1)} \quad u^{(1)} = u \quad y = y^{(2)}$$

quindi sostituendo nel secondo sistema otteniamo:

$$\begin{aligned} \dot{x}^{(2)} &= A^{(2)}x^{(2)} + B^{(2)} [C^{(1)}x^{(1)} + D^{(1)}u] = A^{(2)}x^{(2)} + B^{(2)}C^{(1)}x^{(1)} + B^{(2)}D^{(1)}u \\ y^{(2)} &= C^{(2)}x^{(2)} + D^{(2)}C^{(1)}x^{(1)} + D^{(2)}D^{(1)}u \end{aligned}$$

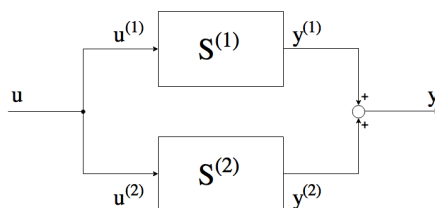
$$\begin{cases} \dot{\underline{x}} = \begin{bmatrix} A^{(1)} & 0 \\ B^{(2)}C^{(1)} & A^{(2)} \end{bmatrix} \underline{x} + \begin{bmatrix} B^{(1)} \\ B^{(2)}D^{(1)} \end{bmatrix} \underline{u} \\ \underline{y} = \begin{bmatrix} D^{(2)}C^{(1)} & C^{(2)} \end{bmatrix} \underline{x} + D^{(2)}D^{(1)}\underline{u} \end{cases}$$

$A_{serie}$  è una matrice triangolare a blocchi quindi:

$$\varphi_{serie}(s) = \det(sI - A_{serie}) = \det(sI - A^{(1)}) \cdot \det(sI - A^{(2)}) = \varphi^{(1)}(s) \cdot \varphi^{(2)}(s)$$

**Parallelo**

$$\dot{\underline{x}} = \begin{bmatrix} A^{(1)} & 0 \\ 0 & A^{(2)} \end{bmatrix} \underline{x} + \begin{bmatrix} B^{(1)} \\ B^{(2)} \end{bmatrix} \underline{u} \quad \underline{y} = [C^{(1)} \quad C^{(2)}] \underline{x} + (D^{(1)} + D^{(2)}) \underline{u}$$



$A_{parallelo}$  è una matrice diagonale:

$$\det(sI - A_{parallelo}) = \det(sI - A^{(1)}) \cdot \det(sI - A^{(2)}) = \varphi_{parallelo}(s) = \varphi^{(1)}(s) \cdot \varphi^{(2)}(s)$$

### 11.3.1 Corollario

Condizione necessaria e sufficiente per asintotica stabilità di un sistema serie e/o parallelo é l'asintotica stabilità dei singoli sistemi. Non vale per la semplice stabilità.

### 11.3.2 Proprietá di controllabilitá e osservabilitá

Condizione necessaria per la controllabilitá (osservabilitá) di un sistema interconnesso é che tutti i suoi possibili sottosistemi siano controllabili (osservabili).

**Dimostrazione** Si consideri un sistema interconnesso  $S$  formato da  $N$  sottosistemi, ognuno dei quali é completamente controllabile e osservabile.

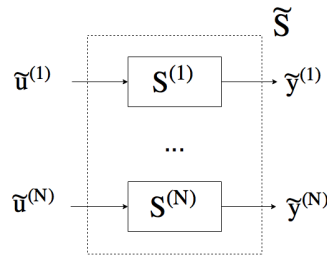


Figura 11.2: sistema ausiliario

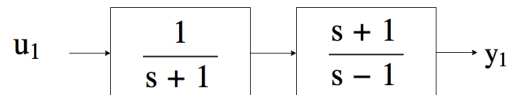
Prendiamo un sistema ausiliario come in figura 11.2 costituito da tutti i singoli  $S^{(i)}$  ognuno con un suo ingresso  $\tilde{u}^{(i)}$  e una sua uscita  $\tilde{y}^{(i)} = \underline{y}^{(i)}$ . Il sistema  $\tilde{S}$  é completamente controllabile da  $\tilde{\underline{u}}$  e completamente osservabile da  $\tilde{\underline{y}}$ .

Il sistema interconnesso  $S$  con aggiunta di ingressi "ausiliari"  $\tilde{u}^{(i)}$  e uscite "ausiliarie"  $\tilde{y}^{(i)}$  corrisponde, se considero come ingressi  $\tilde{\underline{u}}$  e come uscite  $\tilde{\underline{y}}$ , a una retroazione algebrica sull'uscita di  $\tilde{S}$ . Sappiamo che la retroazione algebrica sull'uscita non modifica le proprietá di controllabilitá e osservabilitá, quindi il sistema cosí costituito é completamente controllabile da  $\tilde{\underline{u}}$  e osservabile da  $\tilde{\underline{y}}$ . **C.V.D.**

La controllabilitá é relativa agli ingressi e non dipende dalle particolari uscite. Se scelgo come ingressi quelli "veri"  $\underline{u}$  e come uscite quelle ausiliarie  $\tilde{\underline{y}}$ , allora da  $T_{\tilde{\underline{y}}\underline{u}}(s)$  ottengo le proprietá sulla controllabilitá. Analogamente se considero  $T_{\underline{y}\tilde{\underline{u}}}(s)$  ottengo proprietá sull'osservabilitá. Se scelgo  $T_{\underline{y}\underline{u}}(s)$  ottengo proprietá su controllabilitá e osservabilitá.

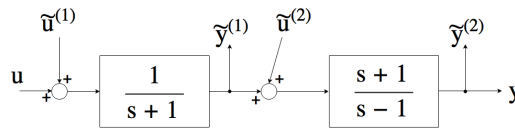
$$\begin{array}{llll}
 T_{\underline{y}\underline{u}}(s) & \Rightarrow & \varphi_{CO}(s) & m_{CO}(s) \Rightarrow \text{stabilitá BIBO} \\
 T_{\tilde{\underline{y}}\underline{u}}(s) & \Rightarrow & \varphi_C(s) & m_C(s) \Rightarrow \text{Controllabilitá, stabilitá di } x_f \\
 T_{\underline{y}\tilde{\underline{u}}}(s) & \Rightarrow & \varphi_O(s) & m_O(s) \Rightarrow \text{Osservabilitá, stabilitá di } y_l \\
 T_{\tilde{\underline{y}}\tilde{\underline{u}}}(s) & \Rightarrow & \varphi(s) & m(s) \Rightarrow \text{Stabilitá interna}
 \end{array}$$

**Esempio** Prendiamo un sistema di ordine 2



$$T(s) = \frac{1}{s-1} \Rightarrow \varphi_{CO}(s) \equiv m_{CO}(s) = s-1$$

Costruiamo il sistema ausiliario:



- Verifichiamo la controllabilità:

$$T_{\tilde{y}u}(s) = \begin{bmatrix} T_{\tilde{y}^{(1)}u}(s) \\ T_{\tilde{y}^{(2)}u}(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{s+1} \\ \frac{1}{s-1} \end{bmatrix} \Rightarrow \varphi_C(s) \equiv m_C(s) = (s+1)(s-1)$$

é completamente controllabile.

- Verifichiamo l'osservabilità:

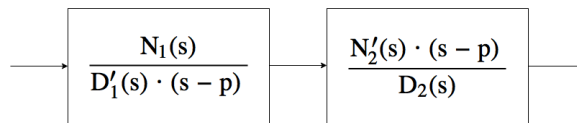
$$T_{y\tilde{u}}(s) = [T_{y\tilde{u}^{(1)}} \quad T_{y\tilde{u}^{(2)}}] = \begin{bmatrix} \frac{1}{s-1} & \frac{s+1}{s-1} \end{bmatrix} \Rightarrow \varphi_O(s) \equiv m_O(s) = (s-1)$$

- Verifichiamo la contemporanea controllabilità e osservabilità:

$$T_{\tilde{y}\tilde{u}} = \begin{bmatrix} \frac{1}{s+1} & 0 \\ \frac{1}{s-1} & \frac{s+1}{s-1} \end{bmatrix} \Rightarrow \varphi(s) \equiv m(s) = (s+1)(s-1)$$

### 11.3.3 Cancellazione

- cancellazione polo-zero nella serie:



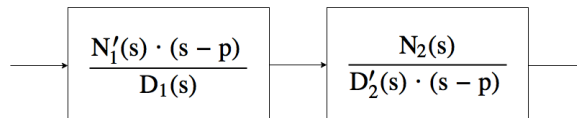
$$\varphi(s) = D'(s) \cdot (s-p) \cdot D_2(s) \quad T(s) = \frac{N_1(s)N_2'(s)}{D_1'(s)D_2(s)}$$

L'autovalore  $s = p$  non é contemporaneamente controllabile e osservabile. Verifichiamo se é controllabile:

$$T_{\tilde{y}u}(s) = \begin{bmatrix} \frac{N_1(s)}{D_1'(s) \cdot (s-p)} \\ \frac{N_1(s)N_2(s)}{D_1'(s)D_2(s)} \end{bmatrix} \quad \varphi_C(s) = D_1'(s) \cdot D_2(s) \cdot (s-p)$$

Quindi  $p$  é controllabile ma per quanto detto prima non é osservabile.

- cancellazione zero-polo nella serie:



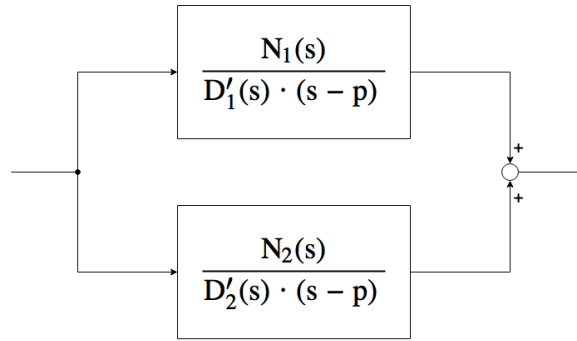
$$T(s) = \frac{N_1'(s)N_2(s)}{D_2'(s)D_1(s)}$$

$s = p$  é osservabile ma non controllabile. Verifichiamolo:

$$T_{y\tilde{u}}(s) = \begin{bmatrix} \frac{N_1'(s)N_2(s)}{D_1(s)D_2'(s)} & \frac{N_2(s)}{D_2'(s) \cdot (s-p)} \end{bmatrix} \quad \varphi_O(s) = D_2'(s) \cdot D_1(s) \cdot (s-p)$$



- cancellazione nel parallelo:



ipotizziamo che  $(s - p)$  sia fattore comune (non é presente in  $D_1'(s)$  e  $D_2'(s)$ )

$$T_{yu}(s) = T_1(s) + T_2(s) = \frac{N_1(s)D_2'(s) + N_2(s)D_1'(s)}{D_1'(s)D_2'(s)(s - p)}$$

$$\varphi_{CO}(s) = D_1'(s)D_2'(s)(s - p) \quad \varphi(s) = D_1'(s)D_2'(s)(s - p)^2$$

– controllabilità:

$$T_{\tilde{y}u}(s) = \begin{bmatrix} \frac{N_1(s)}{D_1'(s)(s - p)} \\ \frac{N_2(s)}{D_2'(s)(s - p)} \end{bmatrix} \quad \varphi_C(s) = D_1'(s)D_2'(s)(s - p)$$

ció perdo controllabilità.

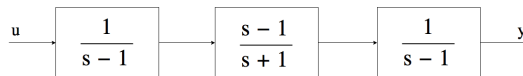
– osservabilità.

$$T_{y\tilde{u}}(s) = \begin{bmatrix} \frac{N_1(s)}{D_1'(s)(s - p)} & \frac{N_2(s)}{D_2'(s)(s - p)} \end{bmatrix}$$

perdo osservabilità.

Se ho due termini comuni al denominatore di due funzioni di trasferimento in parallelo perdo sia la controllabilità che l'osservabilità.

**Esempio** Dato il sistema:



$$\varphi(s) = (s - 1)^2(s + 1)$$

$$T(s) = \frac{1}{s - 1} \frac{s - 1}{s + 1} \frac{1}{s - 1} = \frac{1}{(s - 1)(s + 1)} \Rightarrow \varphi_{CO}(s) = (s + 1)(s - 1)$$

Guardiamo i sotto-sistemi:

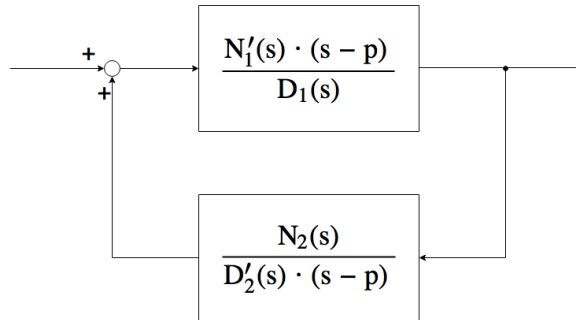
- serie 1-2: cancellazione zero-polo, quindi perdo osservabilità.
- serie 2-3: cancellazione polo-zero, quindi perdo controllabilità.

Poiché esiste un sottosistema non controllabile, allora il sistema complessivo sarà non controllabile. Allo stesso modo poiché un sottosistema non é osservabile, il sistema complessivo sarà non osservabile.

$$\varphi_C(s) = (s + 1)(s - 1) \quad \varphi_O(s) = (s + 1)(s - 1)$$

## 11.4 Retroazione

L'unica situazione in cui il sistema non é completamente controllabile e osservabile é quella in cui gli zeri in catena diretta coincidono con i poli in catena inversa.



$$T(s) = \frac{\frac{N'_1(s)(s-p)}{D_1(s)}}{1 - \frac{N'_1(s)(s-p)}{D_1(s)} \frac{N_2(s)}{D'_2(s)(s-p)}} = \frac{N'_1(s)(s-p)D'_2(s)}{D_1(s)D'_2(s) - N'_1(s)N_2(s)}$$

- Analisi osservabilit  (trascuro le  $u$ )

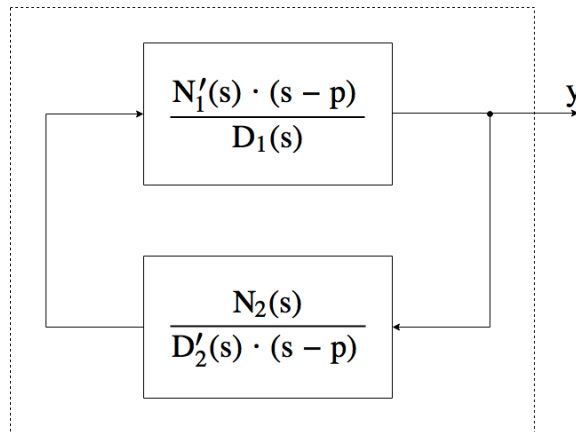


Figura 11.3: analisi osservabilit 

Questo sottosistema 11.3 ha 2 blocchi in serie con perdita di osservabilit  (cancellazione polo-zero)  $\Rightarrow$  il sistema complessivo non é osservabile.

- Analisi controllabilit  (trascuro le  $y$ )

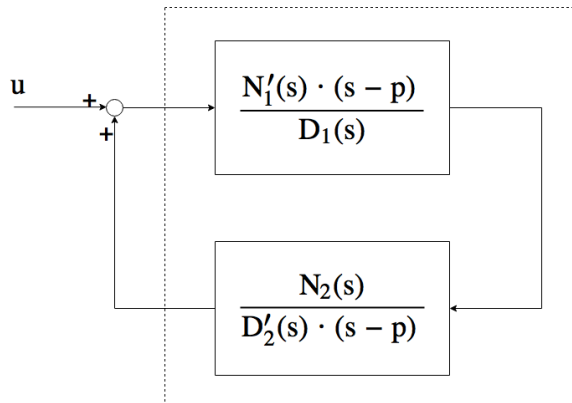
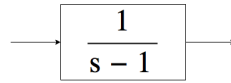


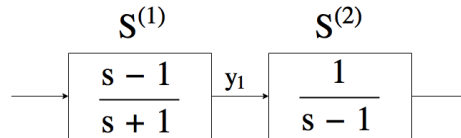
Figura 11.4: analisi controllabilit 

Il sottosistema 11.4 presenta una cancellazione zero-polo quindi il sistema complessivo non é controllabile.

### 11.5 Effetto cancellazione



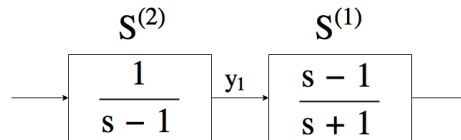
Cerchiamo di cancellare un polo instabile dal sistema in figura ?? aggiungendo un altro sistema in serie.



Questo metodo non può essere utilizzato per eliminare l'instabilità, perché il sistema che abbiamo aggiunto dovrebbe avere uno zero precisamente in +1 (nella pratica sarà un'approximazione). Il residuo del polo +1 che non viene "cancellata", seppur piccolissimo, divergerà con una relazione esponenziale  $e^t$ .

Inoltre aggiungendo il sistema all'ingresso di  $T(s) = \frac{1}{s-1}$ , perdiamo la controllabilità del polo +1. Quindi se  $u = 0$ , ma la condizione iniziale del sistema  $S^{(1)}$  non é nulla  $x^{(1)} \neq 0$ , il secondo sistema  $S^{(2)}$  divergerà.

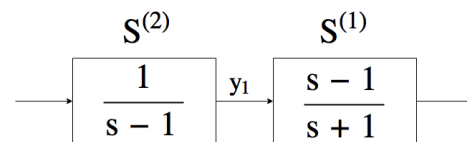
Potremmo allora decidere di postporre il sistema  $S^{(2)}$ :



In questo nuovo sistema la parte instabile é non osservabile, mentre quella stabile é osservabile. Se  $u \neq 0$  oppure  $u = 0$  ma  $x_1 \neq 0$ , la quantità interna  $y_1$  diverge: dall'uscita complessiva del sistema vedo sempre un'uscita limitata ma la quantità interna diverge.

Concludiamo che cancellare algebricamente un autovalore non significa eliminarlo, ma nascondarlo dalla funzione di trasferimento.

#### 11.5.1 Dove "finiscono" gli autovalori "cancellati"



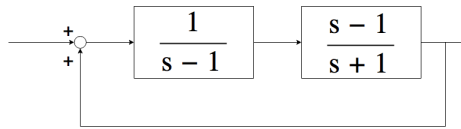
$$T(s) = \frac{1}{s+1} \quad \Rightarrow \quad \varphi_{CO}(s) = s+1$$

in  $\varphi_{CO}(s)$  non compare piú l'autovalore +1, che é stato cancellato. Se invece consideriamo il polinomio caratteristico:

$$\varphi(s) = (s+1)(s-1)$$

$s_1 = -1$  é controllabile e osservabile, mentre  $s_2 = +1$  é solo controllabile.

Effettuiamo una retroazione algebrica sull'uscita:



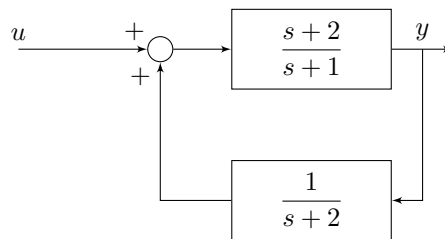
$$T(s) = \frac{\frac{1}{s+1}}{1 - \frac{1}{s+1}} = \frac{1}{s} \Rightarrow \varphi_{CO}(s) = s \quad \varphi(s) = s(s-1)$$

Abbiamo già visto che la retroazione algebrica sull'uscita modifica solo gli autovalori controllabili e osservabili: infatti  $s_2$  non viene modificato, mentre  $s_1$  passa da  $-1$  a  $0$ .

Gli autovalori "cancellati" non si spostano, rimangono parte del polinomio caratteristico.

### Esercizio 22 Studio di un sistema dato in $T(s)$

Dato il sistema:



C'è una cancellazione di un polo in retroazione quindi si ha perdita di controllabilità e osservabilità  $\Rightarrow (s+2) \in \varphi(s)$

$$T(s) = \frac{\frac{s+2}{s+1}}{1 - \frac{s+2}{s+1} \frac{1}{s+2}} = \frac{s+2}{s+1} \frac{s+1}{s+1-1} = \frac{s+2}{s} = 1 + \frac{2}{s}$$

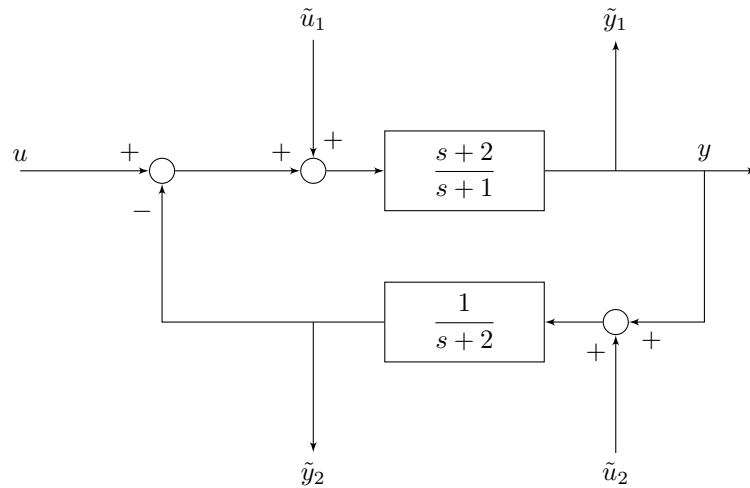
Quindi  $\varphi_{CO}(s) = s \subseteq \varphi(s)$ . Il sistema ha ordine 2  $\Rightarrow \deg\{\varphi(s)\} = 2 \Rightarrow \varphi(s) = s(s+2)$ .

Il sistema non è stabile BIBO perché c'è un polo a  $\Re = 0$  e poiché  $m(s) \equiv \varphi(s)$  il sistema è semplicemente stabile.

Grazie alle relazioni tra polinomi tra i polinomi caratteristici si ricava subito che  $\varphi_C(s) = \varphi_O(s) = s$ .

### Esercizio 23 Studio di un sistema dato in $T(s)$

Dato il sistema dell'esercizio 22 ma con un  $-$  sulla retroazione al nodo sommatore, e con cui sono stati aggiunti ingressi e uscite ausiliarie:



C'è una cancellazione di un polo in retroazione quindi si ha perdita di controllabilità e osservabilità  $\Rightarrow (s+2) \in \varphi(s)$

$$T(s) = \frac{\frac{s+2}{s+1}}{1 + \frac{1}{s+1} \frac{1}{s+2}} = \frac{\frac{s+2}{s+1}}{\frac{s+2}{s+1} + \frac{1}{s+2}} = \frac{s+2}{s+2} = 1$$

$\varphi_{CO}(s) = 1$  quindi nessun autovalore è contemporaneamente controllabile e osservabile.

Studiamo le proprietà strutturali del sistema attraverso gli ingressi e le uscite ausiliari.

•

$$T_{\tilde{y}u}(s) = \begin{bmatrix} T_{\tilde{y}_1 u}(s) \\ T_{\tilde{y}_2 u}(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{1}{s+2} \end{bmatrix} \Rightarrow \varphi_C(s) = (s+2)$$

$$T_{\tilde{y}_2 u}(s) = \frac{\frac{s+2}{s+1} \frac{1}{s+2}}{1 + \frac{1}{s+1} \frac{1}{s+2}} = \frac{\frac{1}{s+1}}{1 + \frac{1}{s+1}} = \frac{1}{s+2}$$

( $T_{\tilde{y}_2 u}(s)$ ) presenta un polo in  $-2$ : esso non deriva dal sistema in catena diretta, dal polo  $-1$ , che è stato spostato dalla retroazione sull'uscita).

•

$$T_{y\tilde{u}}(s) = [T_{y\tilde{u}_1} \quad T_{y\tilde{u}_2}] = \left[ 1 \quad -\frac{1}{s+2} \right] \Rightarrow \varphi_O(s) = (s+2)$$

$$T_{y\tilde{u}_2}(s) = \frac{\frac{1}{s+2} (-1) \frac{s+2}{s+1}}{1 - \frac{1}{s+2} (-1) \frac{s+2}{s+1}} = \frac{-\frac{1}{s+1}}{1 + \frac{1}{s+1}} = \frac{-\frac{1}{s+1}}{\frac{s+2}{s+1}} = -\frac{1}{s+2}$$

•

$$T_{\tilde{y}\tilde{u}}(s) = \begin{bmatrix} T_{\tilde{y}_1 \tilde{u}_1} & T_{\tilde{y}_1 \tilde{u}_2} \\ T_{\tilde{y}_2 \tilde{u}_1} & T_{\tilde{y}_2 \tilde{u}_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{s+2} \\ \frac{1}{s+2} & \frac{1}{(s+2)^2} \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}
T_{\tilde{y}_1 \tilde{u}_1} &= T(s) = 1 \\
T_{\tilde{y}_1 \tilde{u}_2} &= T_{y \tilde{u}_2} = -\frac{1}{s+2} \\
T_{\tilde{y}_2 \tilde{u}_1} &= \frac{\frac{s+2}{s+1} \frac{1}{s+2}}{1 + \frac{1}{s+1} \frac{1}{s+2}} = \frac{\frac{1}{s+1}}{1 + \frac{1}{s+1}} = \frac{1}{s+2} \\
T_{\tilde{y}_2 \tilde{u}_2} &= \frac{\frac{1}{s+2}}{1 + \frac{1}{s+2} \frac{1}{s+1}} = \frac{\frac{1}{s+2}}{1 + \frac{1}{(s+2)^2}} = \frac{s+1}{(s+2)^2} \\
\Rightarrow m(s) &= (s+2)^2 \\
\varphi(s) &= (s+2)^2 \quad \text{perché } m(s) \subseteq \varphi(s) \quad \text{e} \quad \deg\{\varphi(s)\} = 2
\end{aligned}$$

Adesso studiamo nuovamente il sistema con la realizzazione minima:

$$\begin{aligned}
S^{(1)} : & \begin{cases} \dot{x}^{(1)} = -x^{(1)} + u^{(1)} \\ y^{(1)} = x^{(1)} + u^{(1)} \end{cases} \\
S^{(2)} : & \begin{cases} \dot{x}^{(2)} = -2x^{(2)} + u^{(2)} \\ y^{(2)} = x^{(2)} \end{cases}
\end{aligned}$$

Le equazioni di interconnessione sono:

$$\begin{aligned}
u^{(1)} &= u - y^{(2)} = u - x^{(2)} \\
u^{(2)} &= y^{(1)} = x^{(1)} + u^{(1)} = x^{(1)} + u - x^{(2)} \\
y &= y^{(1)} = x^{(1)} - x^{(2)} + u
\end{aligned}$$

$$\begin{cases} \dot{x} = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} u \\ y = \begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix} x + u \end{cases}$$

$$\varphi(s) = \det(sI - A) = \det \begin{bmatrix} s+1 & 1 \\ -1 & s+3 \end{bmatrix} = s^2 + 4s + 4 = (s+2)^2$$

Il sistema é asintoticamente stabile perché tutti gli autovalori in  $m(s)$  saranno sicuramente a  $\Re < 0$ . Questo implica anche la stabilità BIBO.

$$P = \begin{bmatrix} 1 & | & -2 \\ 1 & | & -2 \end{bmatrix} \quad \text{rank}(P) = 1 \quad \Rightarrow \quad \text{NON completamente controllabile}$$

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{rank}(Q) = 1 \quad \Rightarrow \quad \text{NON completamente osservabile}$$

# Capitolo 12

## Riepilogo

### 12.1 Trasformata di Laplace

#### 12.1.1 Proprietá

Linearitá	$f(t) = \alpha f_1(t) + \beta f_2(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} F(s) = \alpha F_1(s) + \beta F_2(s)$
Traslazione in t	$f(t - T) 1(t - T) \xrightarrow{\mathcal{L}} e^{-sT} F(s)$
Traslazione in s	$e^{at} f(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} F(s - a)$
Derivata in t	$\dot{f}(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} sF(s) - f(0^-)$
Derivata n-esima in t	$\frac{d^n}{dt^n} f(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} s^n F(s) - s^{n-1} f(0^-) - s^{n-2} f^{(1)}(0^-) - \dots$ $\dots - s f^{(n-2)}(0^-) - f^{(n-1)}(0^-)$
Integrale in t	$\int_{0^-}^t f(\tau) d\tau \xrightarrow{\mathcal{L}} \frac{1}{s} F(s)$
Derivata in s	$t f(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} -\frac{d}{ds} F(s)$
Derivata n-esima in s	$t^n f(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} (-1)^n \frac{d^n}{ds^n} F(s)$

## 12.1.2 Trasformate notevoli

Impulso	$\delta(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} 1$
Doppietto	$\dot{\delta}(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} s$
Gradino	$\mathbf{1}(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} \frac{1}{s}$
Rampa	$t \xrightarrow{\mathcal{L}} \frac{1}{s^2}$
Esponenziale	$e^{\sigma t} \xrightarrow{\mathcal{L}} \frac{1}{s - \sigma}$
Seno	$\sin(wt) \xrightarrow{\mathcal{L}} \frac{w}{s^2 + w^2}$
Coseno	$\cos(wt) \xrightarrow{\mathcal{L}} \frac{s}{s^2 + w^2}$
Polinomio e seno	$t \cdot \sin(wt) \xrightarrow{\mathcal{L}} \frac{2ws}{(s^2 + w^2)^2}$
Polinomio e coseno	$t \cdot \cos(wt) \xrightarrow{\mathcal{L}} \frac{s^2 - w^2}{(s^2 + w^2)^2}$



## 12.2 Polinomi caratteristici

<i>MATRICE</i>	<i>POLINOMIO</i>	<i>GRADO</i>	<i>INFORMAZIONI</i>
$(sI - A)^{-1}$	$\varphi(s)$	$n_x$	stabilità interna $x_l(t)$
$(sI - A)^{-1}B$	$\varphi_C(s)$	$n_R$	controllabilità $x_f(t)$
$C(sI - A)^{-1}$	$\varphi_O(s)$	$n_O$	osservabilità $y_l(t)$
$C(sI - A)^{-1}B$	$\varphi_{CO}(s)$	$n_{CO}$	stabilità BIBO $y_f(t)$

## 12.3 Stabilità BIBO

Un sistema é stabile BIBO se e solo se  $\nexists$  poli di  $T(s)$  (radici del denominatore di  $T(s)$ ) a  $\Re \geq 0$ .

## 12.4 Stabilità

- **asintoticamente stabile** se tutte le radici di  $m(s)$  hanno  $\Re < 0$ ;
- **instabile** se  $m(s)$  ha almeno una radice a  $\Re > 0$  oppure esiste almeno una radice a  $\Re = 0$  ma tutte con molteplicitá  $> 1$  in  $m(s)$ ;
- **semplicemente stabile** in tutte le altre situazioni: nessuna radice a  $\Re > 0$  e esiste almeno una radice a  $\Re = 0$  con molteplicitá  $= 1$  in  $m(s)$ .

## 12.5 Relazioni tra le due stabilità

asintoticamente stabile  $\Rightarrow$  stabile BIBO  
 NON stabile BIBO  $\Rightarrow$  NON asintoticamente stabile

## 12.6 Metodi utili di calcolo matriciale

### 12.6.1 Inversione di matrici $3 \times 3$

Preso una matrice  $A$  di dimensione  $3 \times 3$ , consideriamo l'elemento in posizione  $(i, j)$  chiamato  $a_{ij}$  e calcoliamo il corrispettivo valore  $a'_{ij}$ , l'elemento in posizione  $(i, j)$  della matrice inversa di  $A$ .

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \quad A^{-1} = \begin{bmatrix} a'_{11} & a'_{12} & a'_{13} \\ a'_{21} & a'_{22} & a'_{23} \\ a'_{31} & a'_{32} & a'_{33} \end{bmatrix} \quad M = \begin{bmatrix} a'_{12} & a'_{13} \\ a'_{32} & a'_{33} \end{bmatrix} \quad a'_{12} = (-1)^{i+j} \frac{\det M}{\det A}$$

Consideriamo l'elemento nella "posizione trasposta"  $(j, i)$  chiamato  $a_{ji}$

Cancelliamo la sua riga e la sua colonna e consideriamo i quattro coefficienti rimanenti

Calcoliamo il determinante del minore  $M$   $2 \times 2$  così ricavato

Dividiamo il risultato per il determinante di  $A$  e moltiplichiamolo per  $(-1)^{i+j}$

### 12.6.2 Inversione di matrici triangolari a blocchi

L'inversa di una matrice triangolare superiore invertibile é sempre una matrice triangolare superiore. Questa proprietà é estensibile alle matrici triangolari a blocchi  $A_{ij}$ . Avremo perciò nell'inversa tutti i blocchi  $A'_{ij}$  al di sotto della diagonale composti anch'essi da zeri. I blocchi della diagonale potranno essere calcolati invertendo ogni singolo blocco. I blocchi restanti (?) andranno calcolati "normalmente", con il metodo illustrato in 12.6.1.

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1m} \\ 0 & A_{22} & \dots & A_{2m} \\ 0 & 0 & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & A_{nm} \end{bmatrix} \quad A^{-1} = \begin{bmatrix} (A_{11})^{-1} & (?) & \dots & (?) \\ 0 & (A_{22})^{-1} & \dots & (?) \\ 0 & 0 & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & (A_{nm})^{-1} \end{bmatrix}$$