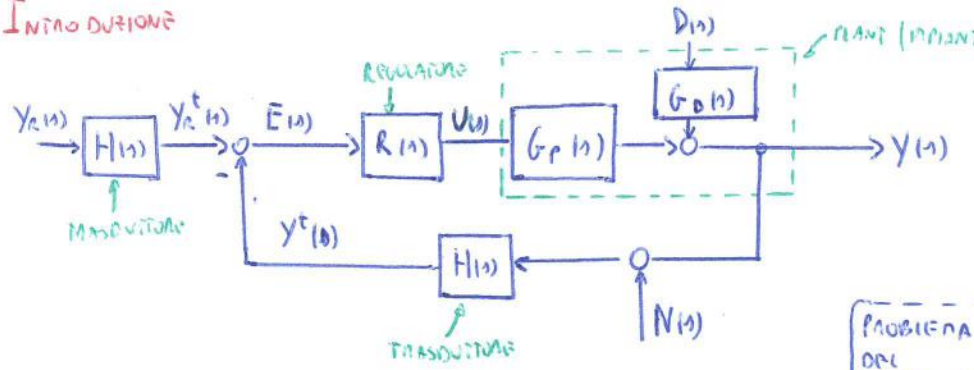
DAVIDE LANTA

Controlli Automatici - Sintesi

Controlli Automatici - Sintesi - Davide Lanza

1 Introduzione



D(s) INGRESSI NON MANIPOLABILI (disturbi)

U(s) INGRESSI MANIPOLABILI

PROBLEMA DEL CONTROLLO : $e(t) \to \emptyset$ → con 4 PROPRIETÀ

R(s) progettato su un modello matematico di S → MODELLO NOMINALE di S

4 PROPRIETÀ:

- STABILITÀ → S (asintoticamente) stabile → (si ottiene con la retroazione se S instabile)
- REIEZIONE DEI DISTURBI → anche se ci sono disturbi $e(t) \to \emptyset$, S stabile
- PRECISIONE → $e(t) \to \emptyset$ il più velocemente possibile
- ROBUSTEZZA → $e(t) \to \emptyset$ anche se c'è una variazione tra valori NOMINALI e REALI

[NUMERI COMPLESSI : $s = a + jb = m \cdot e^{j\theta}$ con $m = \sqrt{a^2+b^2}$ e $\theta = \arctg\left(\frac{b}{a}\right)$ → $\begin{cases} a>\emptyset, b>\emptyset \to \theta \text{ in I QUADRANTE} \\ a<\emptyset, b>\emptyset \to \theta \text{ in II} \\ a<\emptyset, b<\emptyset \to \theta \text{ in III} \\ a>\emptyset, b<\emptyset \to \theta \text{ in IV} \end{cases}$

(PRODOTTO : $|m_1| \cdot |m_2|$ e somma delle fasi $\theta_1 + \theta_2$)]

[FUNZIONI RAZIONALI COMPLESSE : $F(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = b_m \cdot \frac{\prod_{i=1}^{m}(s - z_i)}{\prod_{i=1}^{n}(s - p_i)} = |b_m| \frac{\prod_{i=1}^{m}|s - z_i|}{\prod_{i=1}^{n}|s - p_i|} \cdot e^{j\left[\angle b_m + \sum_{i=1}^{m}\angle(s - z_i) - \sum_{i=1}^{n}\angle(s - p_i)\right]}$

(RAPPR. AGLI REALI / POLI) (AGLI ZERI / POLI IN RAPPRESENTAZIONE POLARE)

$(D(s) \text{ è monico}) \to a_n = 1$; $\deg[D(s)] = n$, $\deg[N(s)] = m$, GRADO RELATIVO $\rho \triangleq n - m$]

(Sistemi reali "approssimativamente" LTI e fisicamente realizzabili) → $S : \begin{cases} \dot{\underline{x}}(t) = A\underline{x}(t) + \underline{b}u(t) + \underline{b}_d d(t) = A\underline{x} + B\begin{bmatrix} u(t) \\ d(t) \end{bmatrix} \\ y(t) = (\underline{x}(t) + D_u u(t) + D_d d(t) \end{cases}$

(Considereremo ingressi t.c. $D_u = \emptyset$) ←

DIPENDE DALLE COND. INIZ. LIBERA DELLO STATO — DIPENDE DALL'ENTRATA — DIPENDE DAL DISTURBO

$$\underline{X}(s) = \underbrace{(sI - A)^{-1}\underline{x}(\emptyset^-)}_{} + \underbrace{(sI - A)^{-1}\underline{b}_n U(s)}_{} + \underbrace{(sI - A)^{-1}\underline{b}_d D(s)}_{}$$

$$\underline{Y}(s) = \underbrace{C(sI - A)^{-1}\underline{x}(\emptyset^-)}_{\text{RISPOSTA LIBERA DEL SISTEMA}} + \underbrace{C(sI - A)^{-1}\underline{b}_n U(s)}_{\text{F. DI TRASF. DEL SISTEMA } G_P(s)} + \underbrace{\left[C(sI - A)^{-1}\underline{b}_d + D_d\right] D(s)}_{\text{F. DI TRASF. TRA DISTURBO E SISTEMA } G_D(s)}$$

$\rho\left[G_P(s)\right] \geq 1$ ⇕ (SYS FISICAMENTE REALIZZABILE)

STABILIZZABILITÀ ⟷ tutti gli eventuali poli NON controllabili da U(s) sono $Re < \emptyset$

RICOSTRUIBILITÀ (detectability) ⟷ tutti gli eventuali poli NON osservabili da Y(s) sono $Re < \emptyset$

2. Il Problema del Controllo

Controllo in Anello Aperto: $u(t) \to [G_p(s)] \to y(t)$ $\qquad U_{OL}(s) = \frac{1}{G_p(s)} Y_R(s)$

(considerando la sola risposta forzata)

4 PROBLEMI:

① $\left[\frac{1}{G_p(s)} \text{ ha } P < 0\right]$ → NON FISICAMENTE REALIZZ.

② $\left[Y(s) = G_p(s) \cdot \frac{Y_R(s)}{G_p(s)}\right]$ → CANCELLAZIONI poli/zeri a parte Re > 0 → problemi con condizioni iniziali non nulle. → NON STABILE

③ $\left[Y_R \to [R] \to U \to [G_p] \to \bigotimes \to Y;\ D \to [G_p]\right]$ → $Y(s) = \underbrace{G_p(s)U(s)}_{Y_R(s)} + \underbrace{G_p(s)D(s)}_{Y_D(s)}$ → il controllo non può agire contro i disturbi → non c'è REIEZIONE AI DISTURBI

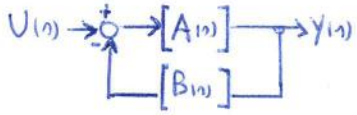
④ $\left[R_{OL}(s) = \frac{1}{G_p^N(s)};\right]$ → $G_p^N(s)$ è NOMINALE, può scostarsi dalla reale $G_p(s)$ → cancellazione $\frac{G_p(s)}{G_p^N(s)}$ non perfetta → MANCA ROBUSTEZZA

$\left[Y_R \to [A] \to [B] \to Y \Rightarrow \frac{Y}{Y_R} = B \cdot A\right]$ RETRO

$\left[Y_R \to \bigotimes \to [A] \to Y;\ [B] \text{ in retro} \Rightarrow \frac{Y}{Y_R} = \frac{A}{1 \mp AB}\right]$

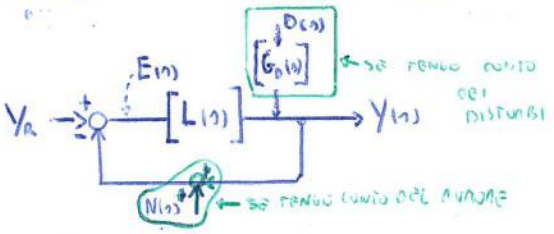
$T_{OL}(s) = A(s)B(s) = \frac{N_A N_B}{D_A D_B} \triangleq \frac{N_A N_B}{P_{OL}(s)}$

Controllo in Anello Chiuso:



$T(s) = \frac{A(s)}{1 - A(s)B(s)} = \frac{N_A D_B}{D_A D_B + N_A N_B} \triangleq \frac{N_A D_B}{P_{CL}(s)}$ (“Numeratore di A”)

FUNZIONE CARATT. DEL SYS: $F(s) = 1 + A(s)B(s) = \frac{P_{CL}(s)}{P_{OL}(s)}$



Dal modello generale: $L(s) \triangleq G_p(s)H(s)R(s)$

CANCELLAZIONI

Se $D_A = (s-p)\bar{D}_A$, $N_B = (s-p)\bar{N}_B$ → (il polo di A in $s=p$ è cancellato dallo zero di B in $s=p$)

$T(s) = \frac{N_A D_B}{\bar{D}_A D_B + N_A \bar{N}_B}$ $\qquad F(s) = \frac{P_{CL}}{P_{OL}} = \frac{(s-p)\left[\bar{D}_A D_B + N_A \bar{N}_B\right]}{(s-p)\left[\bar{D}_A D_B\right]}$

[tutti i poli del sys in OL che mostrano cancellazioni non sono mostrati dalla retroazione]?

$F(s) = 1 + L(s)$ $\qquad Y(s) = \frac{L(s)}{1+L(s)} Y_R(s) + \frac{1}{1+L(s)} G_D(s) D(s) - \frac{L(s)}{1+L(s)} N(s)$

$\frac{L(s)}{1+L(s)} = P(s)$ ← [FUNZIONE DI IMPIANTO IN CICLO CHIUSO]

descrive la f. di trasf. in CL e quanto bene $Y_R(s)$ è ritornato in uscita. Ottima se → 1

$\frac{1}{1+L(s)} = S(s)$ ← [FUNZIONE DI SENSITIVITÀ]

attenua i disturbi se < 1
amplifica se > 1
L'ottima se → 0

è di nuovo $P(s)$ con "−"

non si può ovviare mediante quando i comandi e il rumore interagiscono

3 4 PROBLEMI DEL CONTROLLO:

(1) STABILITÀ: sys. in CL stabile $\Leftrightarrow$ f_{CL} ha zeri $Re < 0$ (ASINT. STAB.)
f_{CL} ha zeri $Re \leq 0$ con $Re = 0 \Leftrightarrow$ molteplicità = 1 (SEMPL. STAB)

(2) PRECISIONE: fronte della risposta senza considerare $D(s)$ né $N(s)$:
l'errore di risposta del sys dipende da $S(s)$
↳ VINCOLO STRUTTURALE: $P(s) + S(s) = 1$
la misura è ovviabile allo studio del segnale $E(s) = \frac{1}{1+L(s)} Y_R(s) = S(s) Y_R(s)$

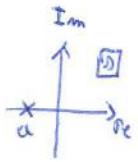
(3) ATTENUAZ./REIEZIONE DEI DISTURBI:
Studio separatamente $D(s)$ e $N(s)$. $P(s)$ e $S(s)$ hanno gli stessi poli
↳ VINCOLO STRUTTURALE: $p[P(s)] = p[L(s)]$ e $p[S(s)] = 0$

(4) ROBUSTEZZA: garantire che le prestazioni siano tali anche quando il sys in ciclo aperto è soggetto a perturbazioni (→ per variazioni nelle risposte al modello nominale)
↳ VINCOLO STRUTTURALE: $\frac{dP}{P} = S(s) \frac{dL}{L}$ → (variazione % della f. di trasf. in CL $P(s)$ risp alla variaz % della f. di trasf. in OL $L(s)$)

più $S(s) \to 0$ più robusto a (< variaz. %)

3. ANALISI DELLA RISPOSTA

SISTEMI DI I ORDINE: $T(s) = \frac{G_0}{s+a}$ → $a > 0 \Leftrightarrow$ ASINT. STABILE
G_0 = guadagno del sys. (f. dinamica)

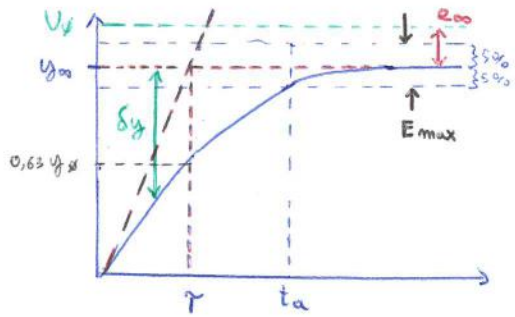


[ingresso $P(s)$] ↑
↳ [$U(s)$ uscita $Y_R(s)$]

↳ RISPOSTA AL GRADINO:

$V(s) = 1/s \cdot V_0$ → (Pb. 33 APPUNTI) → $y(t) = \frac{G_0 V_0}{a}\left[1 - e^{-at}\right] \cdot 1(t) = \left[\frac{G_0 V_0}{a} - \frac{G_0 V_0}{a} e^{-at}\right] \cdot 1(t)$

($\frac{G_0 V_0}{a}$: RISP. A REGIME; $\frac{G_0 V_0}{a} e^{-at}$: RISPOSTA TRANSITORIA)



(VALORE DI REGIME → TH. VAL FINALE): $y_\infty = \lim_{s\to 0} s\, Y(s) = \lim_{s\to 0} \frac{G_0 V_0}{s(s+a)} \cdot s = \frac{G_0 V_0}{a}$

(GRADINO / SCALINO / PERTURBAZIONE): $\left|\frac{\delta_y}{y_{\infty}}\right|_\% = \left|\frac{y(t) - y_\infty}{y_\infty}\right| \cdot 100 = \delta_{y\%} = e^{-at}$

[SCALINO] $\delta_y = y(t) - y_\infty = (G_0 V_0 / a) \cdot \delta_{y\%}$

E_{max} = valore convenzionale di $\delta_{y\%}$

$t_a = -\frac{1}{a} \ln [E_{max}] =$ [TEMPO DI ASSESTAMENTO] ↓ ($= 3\tau$)
↓
t minimo t.c. $\delta_{y\infty} < E_{max}$ $\forall t > t_a$

(E_{max}: 5% 2% 1% ; t_a: 3τ 4τ 5τ)

$y'(0^+) =$ [Th. val finale su derivata in laplace] → $\lim_{s\to\infty} s\, Y(s) = 2$

$G_0 = \lim_{s\to\infty} s \cdot \frac{G_0 V_0}{s+a} = G_0 V_0$

↳ $\tau = 1/a$ (tempo t t.c. $y'(0^+) t = y_\infty$)
[COSTANTE DI TEMPO]

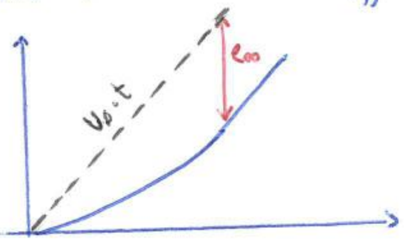
[e_∞ SCOSTAMENTO rispetto al segnale di controllo
↳ nel PROBLEMA DEL CONTROLLO vorremmo $e_\infty \approx 0$
↳ vorremmo $G_0 = a$]

Più a ↑ più t_a ↓ => transitorio più breve

$\left.\frac{y(\tau)}{y(\infty)}\right|_\% \approx 63\%$

↳ RISPOSTA ALLA RAMPA:

$u(t) = U_\phi \, t \cdot 1\!\!1(t) \rightarrow U(s) = U_\phi / s^2$



$y'_\infty = \lim_{s \to \phi} s^2 Y(s) = G_\phi U_\phi$

→ (PG 37 APPUNTI) → $Y(s) = \dfrac{G_0 U_\phi}{s^2} - \dfrac{G_0 U_\phi}{a s} + \dfrac{G_0 U_\phi}{a(s+a)}$ (RAMPA, GRADINO, ESPONENZIALE)

$y(t) = G_\phi U_\phi \left[t - \dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{a} e^{-at} \right] 1\!\!1(t)$

$e(t) = y - y_r = (G_0 U_\phi - U_\phi) t - \dfrac{G_0 U_\phi}{a} + \dfrac{G_0 U_\phi}{a} e^{-at}$

(voluto la U)

se $G_\phi \neq 1$ l'errore non cancella la t → per $t \to \infty$ errore infinito!

(se $G_\phi = 1$)?
$e_\infty = -\dfrac{U_\phi}{a}$

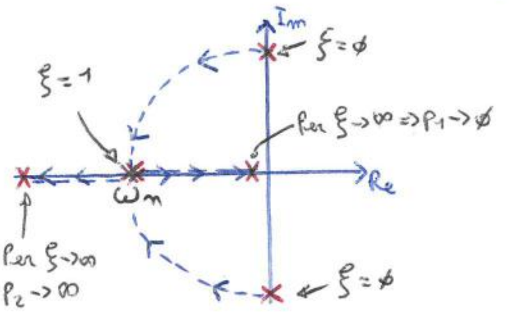
SISTEMI DI II ORDINE:

$T(s) = G_\phi \dfrac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi \omega_n s + \omega_n^2}$

$\omega_n > \phi$ PULSAZ. NATURALE

$\xi \geq \phi$ COEFF. DI SMORZAMENTO

$p_{1,2} = \omega_n \left[\xi \pm \sqrt{-1 + \xi^2} \right]$



(per $\xi > 1 \Rightarrow p_1, p_2 \in \mathbb{R}e \Rightarrow p_1 \cdot p_2 = \omega_n^2$)

$\xi < 1$ → SYS. SOTTOSMORZATO
$\xi = 1$ → SYS. CRIT. SMORZ.
$\xi > 1$ → SYS. SOVRASMORZATI
$\xi < \phi$ → POLI INSTABILI

↳ SOTTOSMORZATI, R. AL GRADINO:

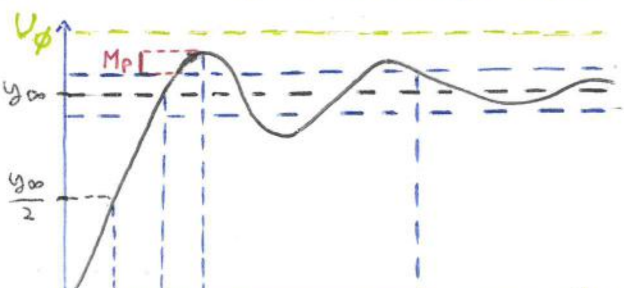
$U(s) = U_\phi / s$

$Y_{step}(s) = G_\phi U_\phi \left[\dfrac{1}{s} + B_1 \cdot \dfrac{1}{s + p_1} + B_2 \cdot \dfrac{1}{s + p_2} \right]$ ($\xi < 1$)

$y_{step}(t) = G_0 U_\phi \left[1 + B_1 e^{p_1 t} + B_2 e^{p_2 t} \right] 1\!\!1(t)$

$\begin{cases} B_1 = \dfrac{1}{2j\sqrt{1-\xi^2}\, e^{i\varphi}} \\ B_2 = -\dfrac{1}{2j\sqrt{1-\xi^2}\, e^{-i\varphi}} \end{cases}$

[ε_{max}: 5% 2% 1%
ts: 3τ 4τ 5τ]



$\begin{cases} p_1 = -\xi\omega_n + j\omega_n \sqrt{1-\xi^2} \\ p_2 = -\xi\omega_n - j\omega_n \sqrt{1-\xi^2} \end{cases}$

$y_\infty = \lim_{s \to \phi} Y(s)\, s = G_\phi U_\phi$

$t_p \downarrow$ per $\xi \downarrow$

$\arg\max [y_{step}(t)] = t_p$ (PEAK TIME) $= \dfrac{\pi}{\omega_n \sqrt{1-\xi^2}}$

↳ $y_{step}(t) = \left[1 - \dfrac{1}{\sqrt{1-\xi^2}} e^{-\xi\omega_n t} \cdot \text{sen}(\omega_n t + \arccos(\xi)) \right] 1\!\!1(t)$

$e^{-\xi\omega_n t} \approx e^{-t/\tau}$

t_d quando $y(t)$ raggiunge $\dfrac{y_\infty}{2}$

$\tau \approx \dfrac{1}{\xi \omega_n}$ (ξ DETERMINA Mp)!

→ è quanto velocemente la risposta si assesta al valore di regime

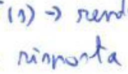
[Gli zeri riducono il grado relativo della T(s) → rendono "meno ripida" la risposta nei primi istanti]

[RISE TIME] $t_r = \dfrac{\pi - \theta}{\omega_n \sqrt{1-\xi^2}}$ (più piccolo t t.c. $y = y_\infty$) $t_r \downarrow$ per $\omega_n \uparrow$ ($\Rightarrow \xi \downarrow$)

$\theta = \arctg \left(\dfrac{\sqrt{1-\xi^2}}{\xi} \right)$

MAX OVERSHOOT $M_p = e^{-\pi / \tg\theta}$; $M_p \downarrow$ per $\xi \downarrow$

$\phi\% \leq M_p\% \leq 100\%$

⇒ [$\xi = \phi$ NO SMORZAMENTO → 

→ SYS SEMPL. STABILE]

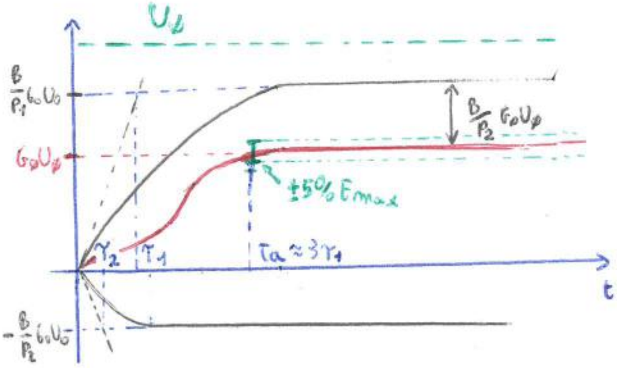
Di solito è meglio $0,3 < \xi < 0,5$ → più piccolo riduce la robustezza del sistema
mi tengo lontano da $\xi = 1$

↳ SOVRASMORZATI, R. AL GRADINO:

$U(s) = U_0/s$ $\quad Y_{step}(s) = G_0 U_0 \left[\frac{1}{s} + B_1 \frac{1}{(s-p_1)} + B_2 \frac{1}{(s-p_2)} \right]$ ($\xi > 1$)

$$\begin{cases} B_1 = -\frac{1}{p_1} \frac{p_1 p_2}{p_2 - p_1} \\ B_2 = \frac{1}{p_2} \frac{p_1 p_2}{p_2 - p_1} \end{cases} \qquad B := \frac{p_1 p_2}{p_2 - p_1}$$

$$y_{step}(t) = G_0 U_0 \left[1 - B\left(\frac{1}{p_1} e^{p_1 t} - \frac{1}{p_2} e^{p_2 t} \right) \right] 1(t)$$



A parità di ω_n, sovrasmorzato più lento di un sottosmorzato.

← ($e^{p_2 t}$ più veloce di $e^{p_1 t}$ → infatti $p_2 < p_1$)
↓
il transitorio è dato da $3\tau_1$ (se voglio $E_{max} = 5\%$)
↳ si considera quello dell'exp. più lento

[$5\tau_2 \leq \tau_1$ infatti è una buona condizione per approssimare $t_a \approx 3\tau_1$ (se $E_{max} = 5\%$)
↳ SISTEMA DOMINANTE DEL I ORDINE
(sys II ordine contornato da due risposte di I ordine)]

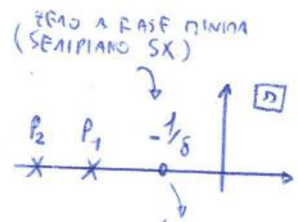
E_{max}:	5%	2%	1%
	↓	↓	↓
t_a:	3τ	4τ	5τ

↳ EFFETTO DEGLI ZERI NEI SOVRASMORZATI:

↳ ZERI A FASE MINIMA ($Re < 0$)

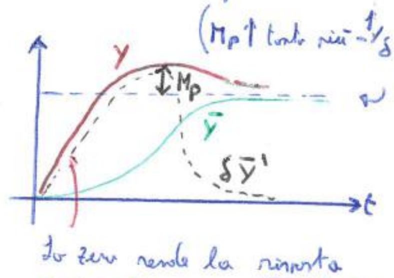
$$T(s) = \frac{(p_1 p_2)(1 + s\delta)}{(s-p_1)(s-p_2)} = \frac{\delta p_1 p_2 s + p_1 p_2}{(s-p_1)(s-p_2)} = \frac{\delta p_1 p_2 (s + 1/\delta)}{(s-p_1)(s-p_2)}$$

$T(s)$ ↑ [uniamo f. di trasf. comune]; $\frac{p_1 p_2}{(s-p_1)(s-p_2)}$ → $\bar{y}$ (risposta senza zeri); $(1 + s\delta)$ → [produce δ volte la derivata della risp. al gradino senza zeri $\bar{y}'$]



(M_p ↑ tanto più $-1/\delta$ vicino all'origine)

perciò: $y_{step}(t) = \bar{y}_{step}(t) + \delta \bar{y}'_{step}(t)$



Lo zero rende la risposta più pronta, a meno di un M_p

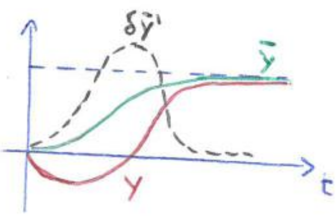
Anche se ha un picco di sovraelongazione M_p, il sys sovrasmorzato non presenta oscillazioni nella coda.

[Più lo zero è vicino ad un polo, più se ne attenua la dinamica! Se $z = -1/\delta \to p_1$
↳ p_2 polo dominante (CANCELLAZIONE POLO p_1)] !

↳ ZERI A FASE NON MINIMA ($Re > 0$)

$$T(s) = \frac{p_1 p_2 (1 - s\delta)}{(s-p_1)(s-p_2)}$$

[la derivata stavolta si sottrae] ⇒ $y_{step}(t) = \bar{y}_{step} - \delta \bar{y}'_{step}$



↳ risposta più lenta con sottoelongazione! → meglio non avere zeri $Re > 0$!

GENERALIZZAZIONI:

$$Y(s) = Y_L(s) + Y_F(s)$$

$$Y_F(s) = T(s)V(s) = \frac{N \cdot N_u}{D \cdot D_u} = \frac{N(s)}{\prod_i^n (s-p_i)} \cdot \frac{N_u(s)}{\prod_i^q (s-q_i)} \overset{\text{[FRATTI SEMPLICI]}}{=} \underbrace{\sum_i \frac{A_i}{(s-p_i)^{m_i}}}_{Y_T(s)} + \underbrace{\sum_i \frac{B_i}{(s-q_i)^{l_i}}}_{Y_L(s)}$$

($N = N(s)$, $D = D(s)$)

- $Y_T(s)$ = risposta transitoria
- $Y_L(s)$ = risposta a regime
- m_i = molteplicità di p_i
- p_i = polo del sys
- l_i = molteplicità di q_i
- q_i = polo del segnale

[POSSO FARLO ⇕ $q_i \neq p_j, \forall i,j$ (poli SEGNALE ≠ POLI SYS)]

↓

[Se questa ipotesi non è vera, nella dinamica non riesco distinguere REGIME e TRANSITORIO] !

$$y_F(t) = \sum_i A_i \underbrace{\gamma_i(t)}_{\text{TERMINE POLINOMIALE CHE DERIVA DALLA MOLTEPLICITÀ}} e^{p_i t} + \sum_i B_i \underbrace{\delta_i(t)}_{\text{FUNZIONI ELEMENTARI IN CUI È COSTITUITO } V(s)} e^{q_i t}$$

TRANSITORIO ↑ — REGIME ↑

[SEMPLICE STABILITÀ non assicura la limitatezza della risposta?]

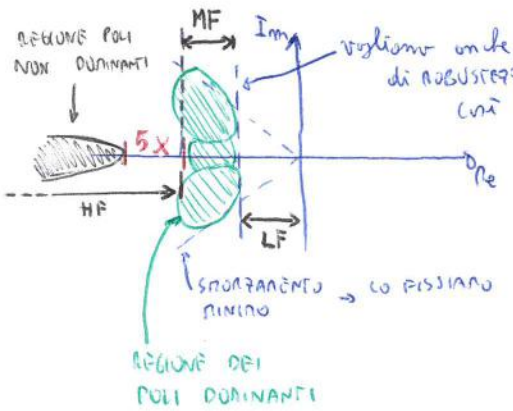
↓

[come nel caso della RISONANZA, ai segnali limitati può corrispondere risposta divergente!]

↓

[STABILITÀ BIBO è una condizione ennesima per noi!]

NOTA PER LA PROGETTAZIONE:



vogliamo anche un limite di ROBUSTEZZA per i poli, così da non ritrovarmi $Re \geq 0$

REGIONI DI:
- LF: low freq
- MF: Medium f.
- HF: High f.

[Per ottenere un transitorio BREVE i poli devono essere scelti di almeno un fattore 5x]

4. RISPOSTA IN FREQUENZA

$u(t) \to [T(s)] \to y(t)$ $\quad$ prova $u(t) = \text{sen}(\omega_\phi t) \overset{\mathcal{L}}{\longleftrightarrow} U(s) = \dfrac{\omega_\phi}{s^2+\omega_\phi^2}$

$y(t) = y_{\phi}(t) + y_R(t)$ $\quad$ ($y_\phi(t) \to 0$ per t grandi) $\quad \to y_R(t) = \underbrace{|T(j\omega_\phi)|}_{>\phi\ \text{AMPLIFICAZ.},\ <\phi\ \text{ATTENUAZ.}} \text{sen}\left(\omega_\phi t + \underbrace{\angle T(j\omega_\phi)}_{>\phi\ \text{ANTICIPO},\ <\phi\ \text{RITARDO}}\right)$

$$T(s) = \frac{\sum_{i=\phi}^{m} b_i s^i}{\sum_{i=\phi}^{n-1} a_i s^i + s^n} = \frac{b_m \prod_{i=1}^{m_1}(s+z_i)\prod_{j=1}^{m_2}(s-z_j^1)}{\prod_{i=1}^{n_1}(s+p_i)\prod_{j=1}^{n_2}(s-p_j^1)} = K_\phi \cdot \frac{\prod_{i=1}^{m_1}\left(1+\frac{s}{z_i}\right)\cdot\prod_{j=1}^{m_2}\left(1-\frac{s}{z_j^1}\right)}{\prod_{i=1}^{n_1}\left(1+\frac{s}{p_i}\right)\cdot\prod_{j=1}^{n_2}\left(1-\frac{s}{p_j^1}\right)}$$

(p reali $Re<\phi$; p reali $Re>\phi$) $\quad \left(\frac{1}{z_i} \triangleq \delta_i\right)$ $\quad \left(\frac{1}{p_i} \triangleq \tau_i\right)$

$$|T(j\omega)| = |K|\ \frac{\prod_{i=1}^{m_1}|1+j\omega\delta_i| \cdot \prod_{j=1}^{m_2}|1-j\omega\delta_j^1|}{\prod_{i=1}^{n_1}|1+j\omega\tau_i| \cdot \prod_{j=1}^{n_2}|1-j\omega\tau_j^1|} \quad ; \quad \angle T(j\omega) = K + \sum_{i=1}^{m_1} 1+j\omega\delta_i$$

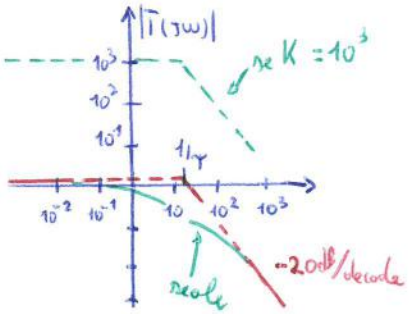
$\left(20\log_{10}|T(j\omega)| = |T(j\omega)|_{dB}\right)$

$$|T(j\omega)|_{dB} = |K|_{dB} + \sum_{i=1}^{m_1}|1+j\omega\delta_i|_{dB} + \sum_{j=1}^{m_2}|1-j\omega\delta_j^1|_{dB} - \sum_{i=1}^{n_1}|1+j\omega\tau_i|_{dB} - \sum_{j=1}^{n_2}|1-j\omega\tau_j^1|_{dB}$$

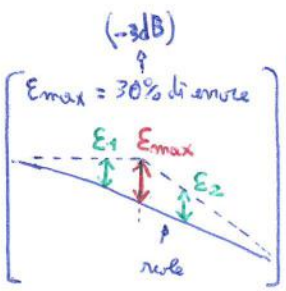
DIAGRAMMA DI MODULO: SYS I ORDINE

$$T(s) = \frac{1}{1+s\tau} \qquad \log|T(j\omega)| = -\log|1+j\omega\tau| = \begin{cases} \log(1) = \phi & \omega\tau \ll 1 \to \omega \gg 1/\tau \\ -\log|\omega\tau| & \omega\tau \gg 1 \to \omega \ll 1/\tau \end{cases}$$

$-\log\omega + \log\frac{1}{\tau}$ (retta inclinata) (intercetta)



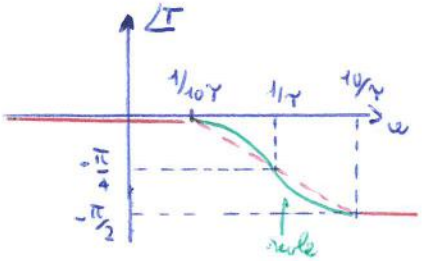
$\Rightarrow$



TRASLAZIONE:
- $\uparrow$ se $|K_\phi| > 1$
- $\downarrow$ se $|K_\phi| < 1$

DIAGRAMMA DI FASE: SYS I ORDINE

$$\angle T(j\omega) = -\arctan\left(\frac{\omega\tau}{1}\right) = \begin{cases} \phi & \omega \ll 1/\tau \\ -\pi/2 & \omega \gg 1/\tau \\ -\pi/4 & \omega = 1/\tau \end{cases}$$



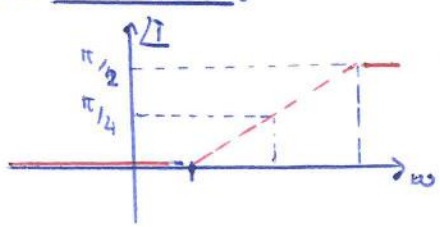
ε_1 per $\frac{1}{10\tau} = 10\%$
ε_2 per $\frac{10}{\tau} = 10\%$
} polo è TRASCURABILE (mezzo dal 10%)

$\left[\frac{1}{\tau} \to \text{polo } Re<\phi\right]$

TRASLAZIONE:
- $\uparrow$ se $\angle K_\phi > \phi$
- $\downarrow$ se $\angle K_\phi < \phi$

[abbiamo la fase di π se $\angle K_\phi < \phi$?]

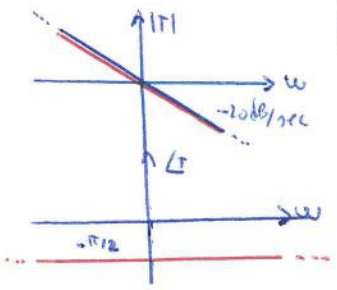
NEI PAI INSTABILI:



$\left[\frac{1}{\tau} \to \text{polo } Re>\phi\right] \to$ ANTICIPO DI FASE

Ecco così ricominciamo i poli instabili

- per poli in $s=\phi$:

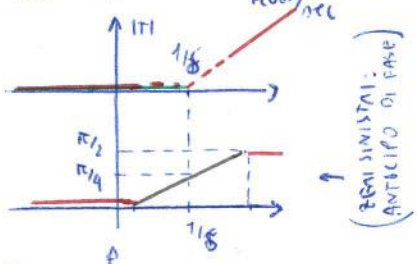


(grafici non armonizzati)

$T(s) = 1/s$

- per zeri $Re < \phi$:

$T(s) = 1 + s\delta$

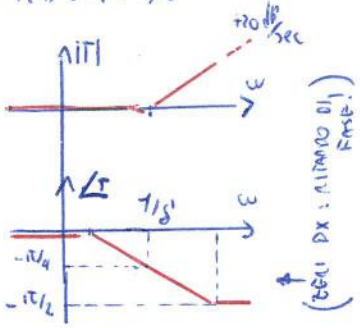


(ZERI SINISTRI: ANTICIPO DI FASE)

(ZERI A FASE MINIMA)

- per zeri $Re > \phi$:

$T(s) = 1 - s\delta'$



(ZERI DX: RITARDO DI FASE)

(ZERI A FASE NON MINIMA)

- per zeri in $s=0$:

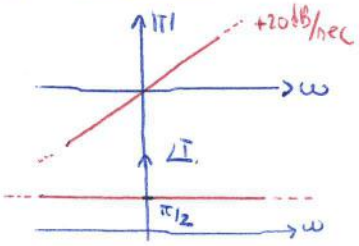


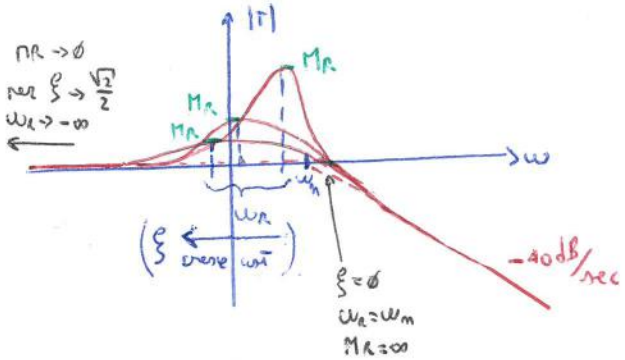
DIAGRAMMA DI MODULO : SYS II ORDINE:

$$T(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2} = \frac{1}{\frac{s^2}{\omega_n^2} + 2\xi\frac{s}{\omega_n} + 1}$$

$(\xi < 1)$?

(POLI NON DIVIDIBILI IN $(s+p_1)(s+p_2)$) !

$$\log|T(j\omega)| = -\log\left|\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right) + j2\xi\frac{\omega}{\omega_n}\right| \approx \begin{cases} \phi \ / \log(1) & , \ \omega \ll \omega_n \\ -2\log\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right) = -2\log(\omega) + 2\log(\omega_n) & , \ \omega \gg \omega_n \end{cases}$$



$$\left[\omega_R = \omega_n\sqrt{1-2\xi^2}\right] \Leftrightarrow \left(0 \le \xi \le \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

LA PULSAZIONE DI PICCO (RISP. DI RISONANZA)

$$\left[\text{ANDAMENTO MONOTONO DECRESCENTE}\right] \Leftrightarrow \left(\frac{\sqrt{2}}{2} < \xi < 1\right)$$

$$\left(M_R = \frac{1}{2\xi\sqrt{1-\xi^2}}\right) \to M_R \uparrow \text{ per } \xi \to \phi$$

$$\left[\begin{array}{l}\text{ottima}\\ \text{misura di risonanza}\end{array}\right] \to M_R|_{dB} = -20\left[\log 2\xi\right] - 10\left[\log\left(1-\xi^2\right)\right]$$

?

(definita non ha più molto altro)

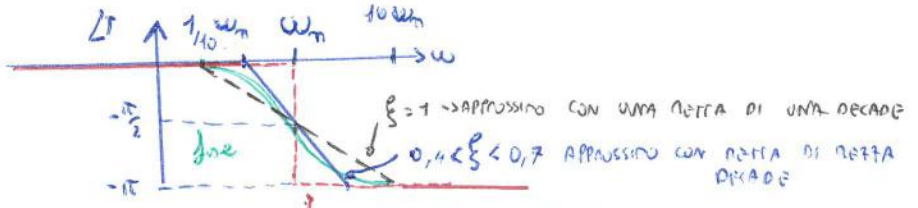
$\xi = 0{,}3$ dà un picco a 3dB

LA SOGLIA SOLITAMENTE ACCETTABILE

DIAGRAMMA DI FASE : SYS II ORDINE :

$$\angle T(j\omega) = \arctg\left[\frac{-2\xi\,\omega/\omega_n}{1-\omega^2/\omega_n^2}\right] = \begin{cases} \phi & \omega \ll \omega_n \\ -\pi/2 & \text{per } \omega = \omega_n \\ -\pi & \omega \gg \omega_n \end{cases}$$

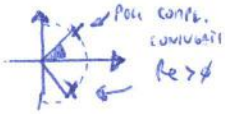
[ABBASSO LE FASI DI π SE $|K_\phi| < \phi$] ?



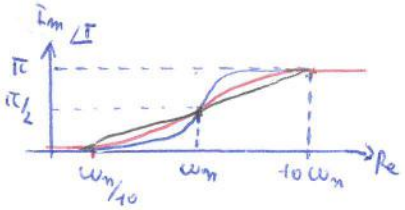
fase a gradino ($\xi = \phi$) → per $\xi < 0{,}3$ APPROSSIMO A GRADINO

• per POLI $Re > 0$ (INSTABILI):

$$T(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 - 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}$$



$\Rightarrow$

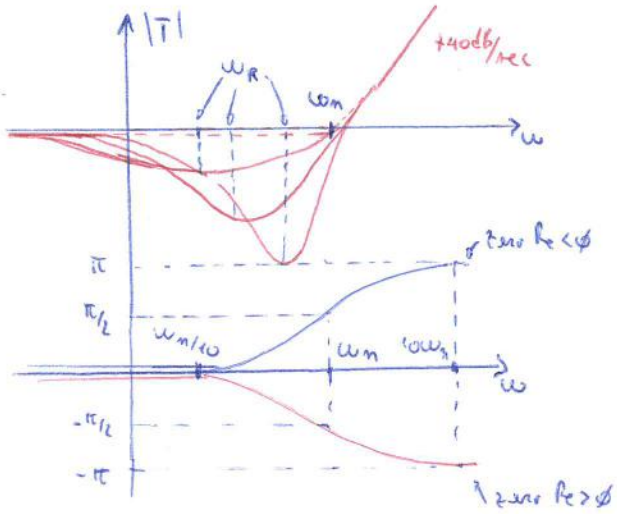


• per ZERI complessi coniugati:

$$T(s) = \frac{s^2 \pm 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}{\omega_n^2}$$

(+) → zeri Re < 0
(−) → zeri Re > 0

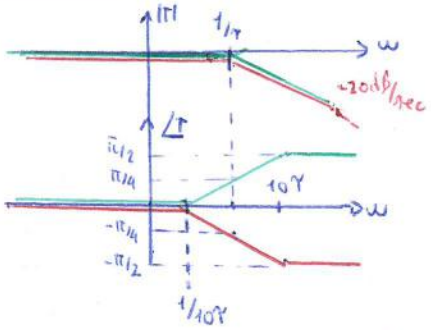
$$\boxed{\angle T(j\omega) = \pm \operatorname{arctg}\left[\frac{\pm\, \omega/\omega_n}{1 - \omega^2/\omega_n^2}\right]}$$



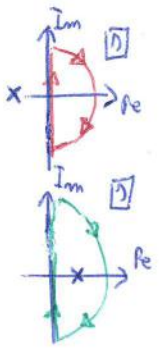
(IL DIAGRAMMA PER $\omega \to 0$ OVVERO IL CONTINUO NON TRATTEGGIATO PARTE A $\omega = 0$ PARTISCE A $\omega = +\infty$)

DIAGRAMMA POLARE: SYS I ORDINE

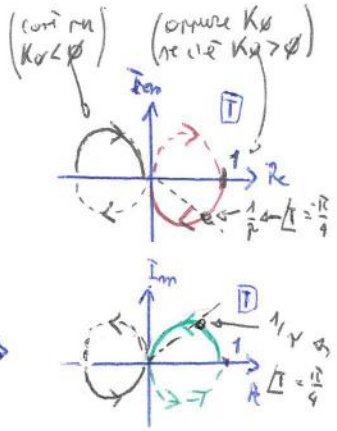
$$T(s) = \frac{1}{1 \pm s\tau}$$



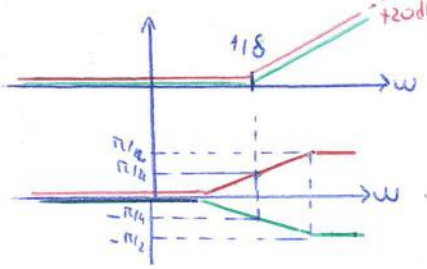
$\Rightarrow$



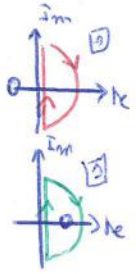
$\Rightarrow$



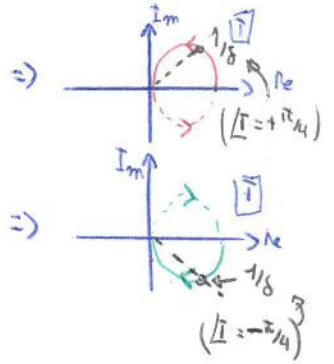
$$T(s) = \frac{1 \pm s\delta}{1}$$



$\Rightarrow$



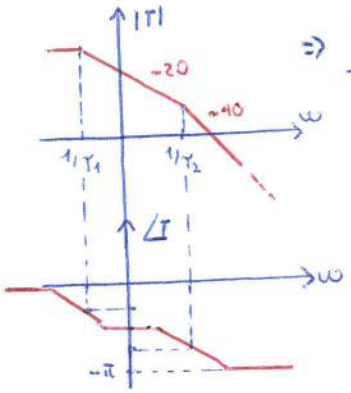
$\Rightarrow$



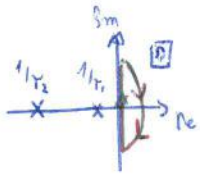
↳ DIAGRAMMA POLARE: SYS II ORDINE

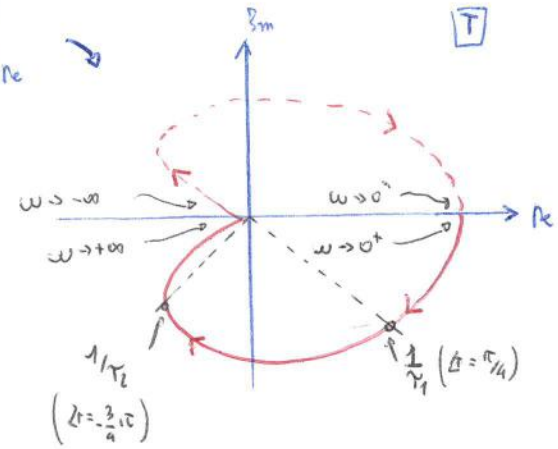
$$T(\jmath\omega) = K_\phi \frac{1}{(1+\jmath\omega\tau_1)(1+\jmath\omega\tau_2)}$$

se $K_\phi > \phi$



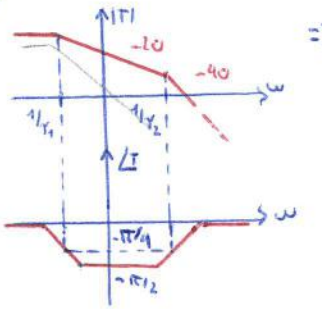
$\Rightarrow$



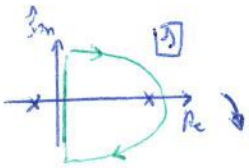


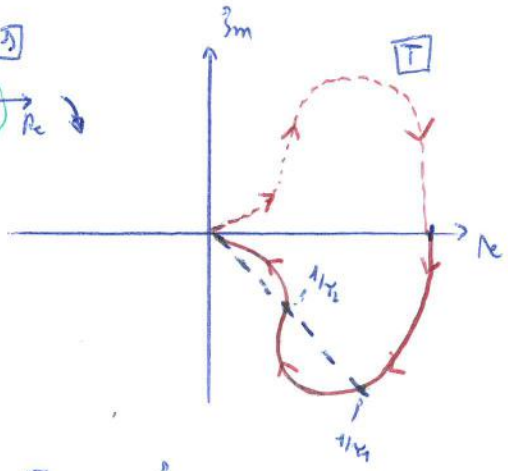
($\tau_1 \gg \tau_2$ LA $1/\tau_1$ DOMINANTE)

$$T(\jmath\omega) = K_\phi \frac{1}{(1+\jmath\omega\tau_1)(1-\jmath\omega\tau_2)}$$



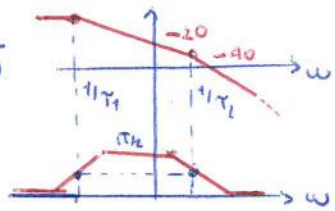
$\Rightarrow$



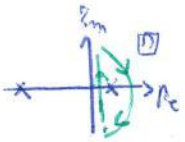


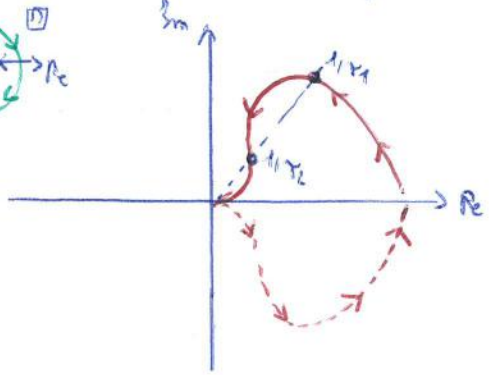
($\frac{1}{\tau_2}$ Re $> \phi$ POLO NON DOMINANTE)

$$T(\jmath\omega) = K_\phi \frac{1}{(1-\jmath\omega\tau_1)(1+\jmath\omega\tau_2)}$$



$\Rightarrow$



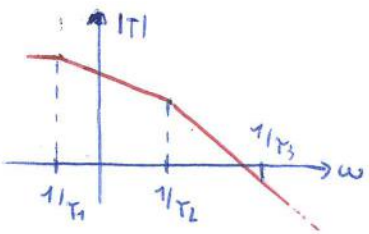


($\frac{1}{\tau_1}$ Re $> \phi$ POLO DOMINANTE!)

(con entrambi Re $> \phi$ è il mino ma stabile)

↳ DIAGRAMMA POLARE: SYS III ORDINE

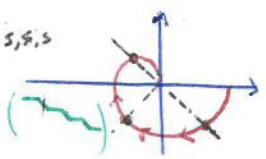
(SUPPOSTO $\tau_1 > \tau_2 > \tau_3$)



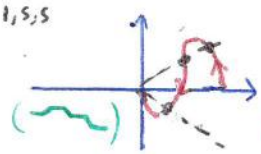
(S = STABILE (Re $< \phi$), I = INSTABILE (Re $> \phi$)) ($\frac{1}{\tau_1}, \frac{1}{\tau_2}, \frac{1}{\tau_3}$)

(SUPPOSTO $K_\phi > \phi$)

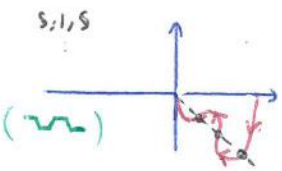
S,S,S



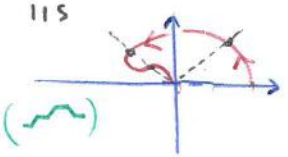
I,S,S



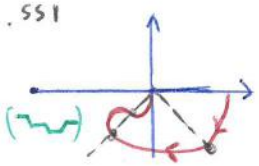
S,I,S



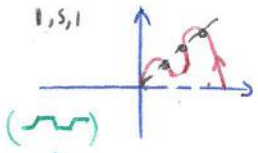
III



SSI

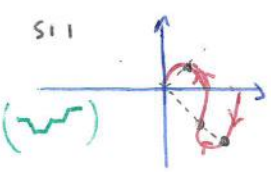


I,S,I

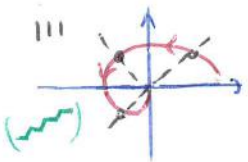


FASE

SII

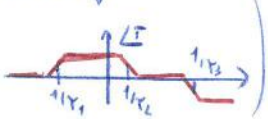


III



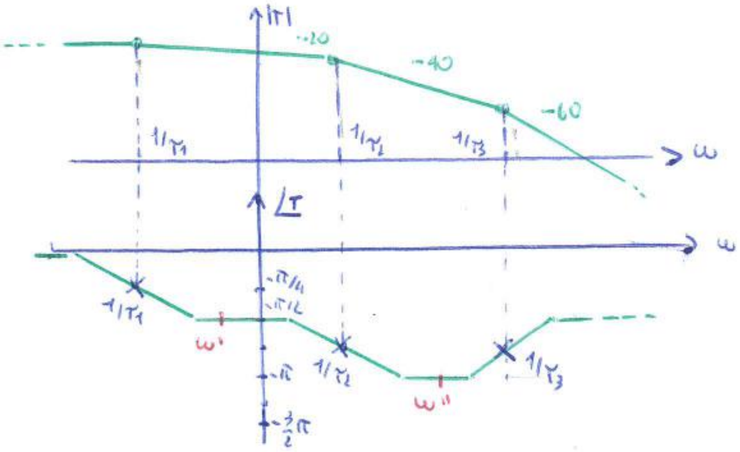
[FASE: ogni Re $> \phi$ è $\_\_$ di $\pi/2$; ogni Re < 0 è $\sim$ di $\pi/2$]

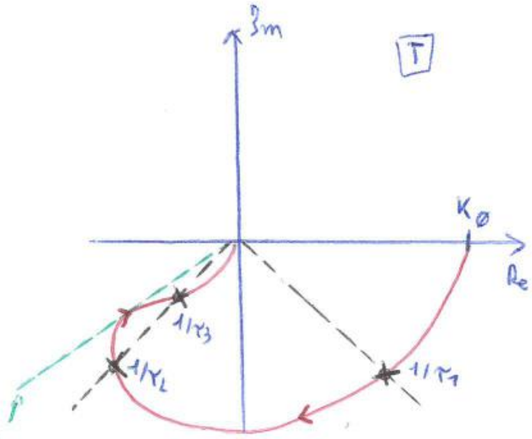
(es: (I,S,S))



Es: $T(s) = K_0 \frac{1}{(1+sT_1)(1+sT_2)(1+sT_3)}$

(s, s, s)





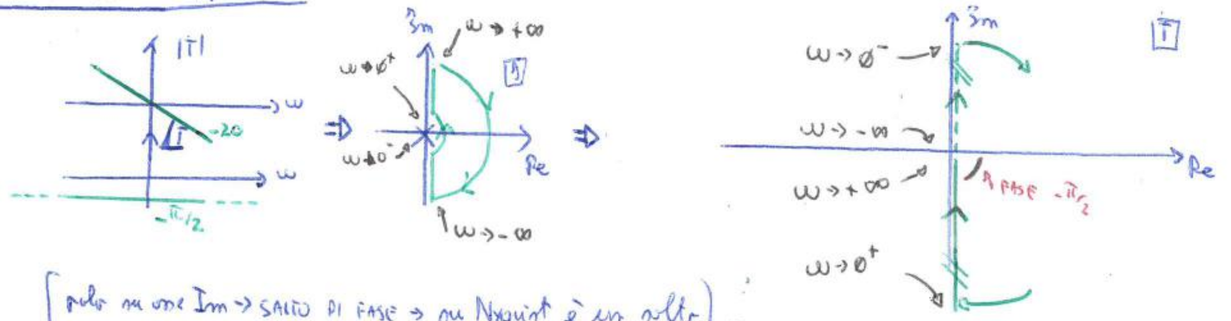
[ω''', ω'', ω' non esistono così! sono punti di fase minima! ↳ DOVUTO ALL'APPROX ↗ ↘ ω''' un solo minimo! e maggiori non ci quello stesso valore]

[FASE MINIMA! si ha per $\angle T(j\omega''')$]

[il max è $-\pi$ se su ω''' la FASE ARRIVA A $-\pi$, ovvero il suo valore approx.]

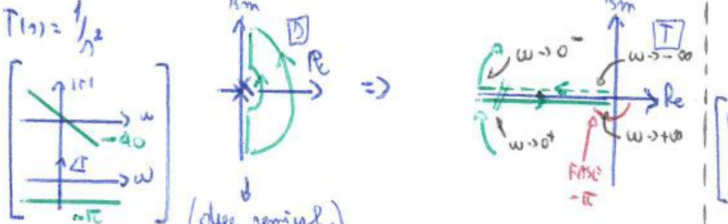
↳ DIAGRAMMI POLARI "APERTI": poli Re = 0

$T(s) = 1/s$



[polo su asse Im -> SALTO DI FASE -> su Nyquist è un salto di π di RAGGIO ∞] ↗

$T(s) = 1/s^2$

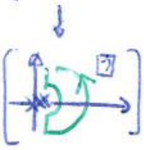


(due semicirc. su poli)

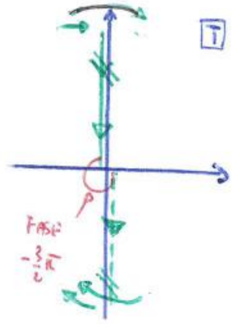
(due salti di π con raggio ∞) -> un salto di 2π

$T(s) = 1/s^3$

[pendenza $|T| = -60\,dB/dec$, $\angle T = -\frac{3}{2}\pi$]



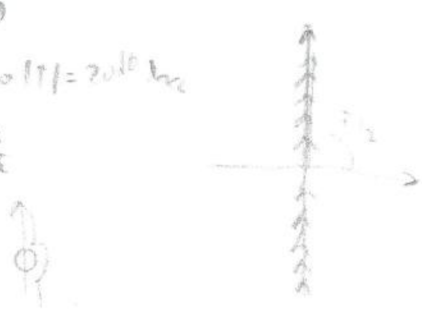
-> (3 POLI, SALTO DI 3π)



$T(s) = s$

pendenza $|T| = 20\,dB/dec$

$\angle T = \frac{\pi}{2}$

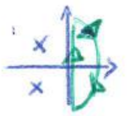


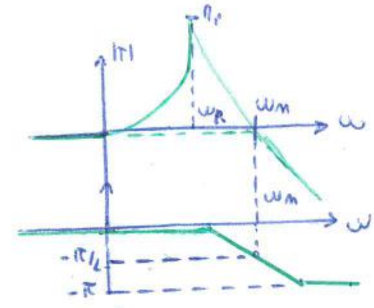
↳ DIAGRAMMI POLARI: POLI COMPLESSI CONIUGATI

$$T(s) = K_0 \frac{\omega_n}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}$$

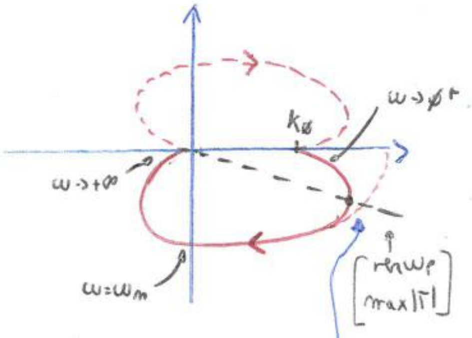
TERMINE II ORDINE CON POLI Re < 0

[SUPPONGO $0 < \xi < 1$]





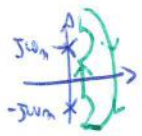
(VEDI 4 RETRO)

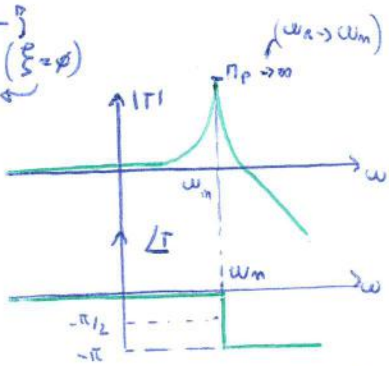


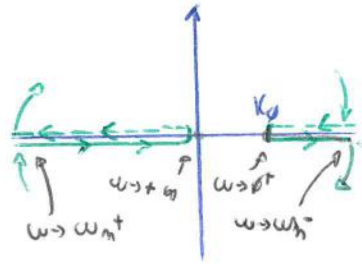
↳ Se i poli fossero reali e distinti ($\xi > 1$) si avrebbe $M_p = 0$ → Sys II ordine visto in 5 retro)

↳ DIAGRAMMI POLARI "APERTI": POLI C.C. SU ASSE Im: ($\xi = 0$)

$$T(s) = K_0 \frac{\omega_n}{s^2 + \omega_n^2}$$





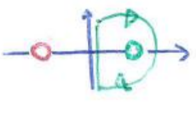


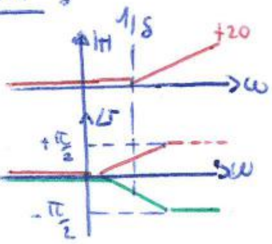
UN PICCO DI RISONANZA ω_p CHE $\omega_p \to \omega_n$
↳ $M_p \to \infty$ → CAUSA UNA CADUTA ISTANTANEA DI FASE DI $-\pi$ IN ω_n!

(salto di fase di π) in ω_n

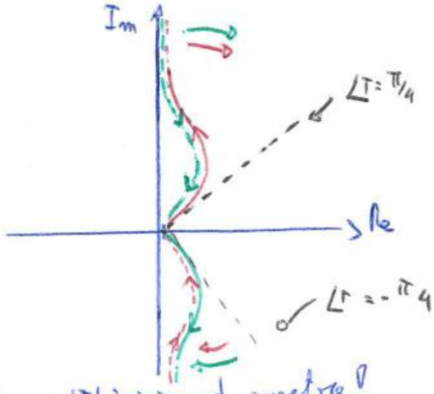
↳ DIAGRAMMA POLARE: ZERI:

$$T(s) = 1 \pm s\delta$$





⇒

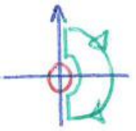


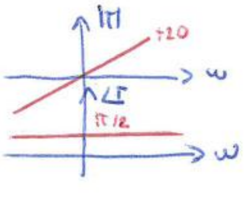
→ per $\omega = 0$ → $\angle T = 0$ e $|T| = 0$

→ per $\omega \Rightarrow \infty$ → $\angle T \to \pm\frac{\pi}{2}$ e $|T| \to \infty$
↑ FASE ASINTOTICA!

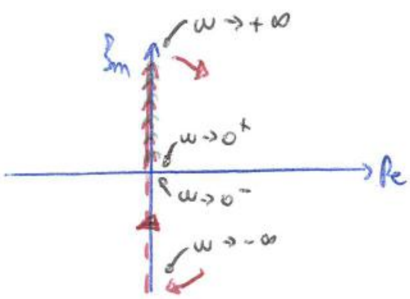
→ per $\angle T = \pm\frac{\pi}{4}$ ⇒ $|T|$ inizia ad aumentare!
($\omega = 1/\delta$)

$$T(s) = s$$



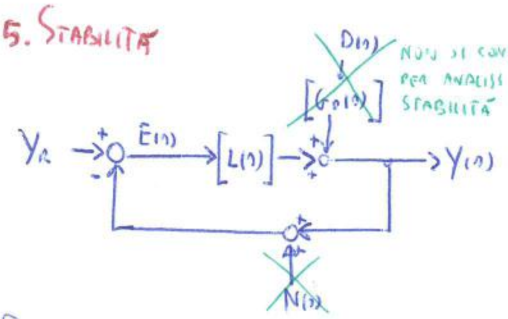


⇒



→ $\forall \omega > 0$ ⇒ $\angle T = \pi/2$
per $\omega \to 0$ ⇒ $|T| \to 0$
per $\omega \to \infty$ ⇒ $|T| \to +\infty$

5. STABILITÀ



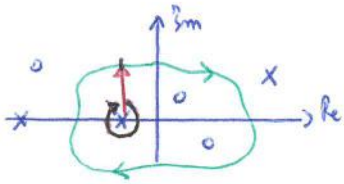
$\equiv Y_R(s) \to [P(s)] \to Y(s)$

$$P(s) = \frac{L(s)}{F(s)} = \frac{L(s)}{1+L(s)}$$

$$F(s) = 1 + \frac{N_L}{D_L} = \frac{D_L + N_L}{\varphi_{OL}} = \frac{\varphi_{CL}}{\varphi_{OL}}$$

[(RADICI φ_{CL} -> "POLI" DI φ_{OL}) => POLI in CL sono ZERI in OL
(RADICI φ_{OL} -> "POLI" φ_{CL}) => ZERI in CL sono POLI in OL]

↳ PRINCIPIO DELL'ARGOMENTO (o FASE):



-> in un giro completo di γ:
(per i punti interni: ogni POLO -> Δfase di $+2\pi$
ogni ZERO -> Δfase di -2π
per i punti esterni: Δfase $= \emptyset$ per entrambi)

-> $N_o = n_z^i - n_p^i$

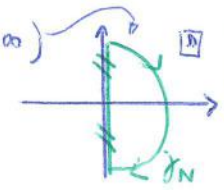
[# ROTAZ. ORARIE ATTORNO A ORIGINE] [# ZERI INTERNI A γ] [# POLI INTERNI A γ]

$N_A = -N_o$

↳ CRITERIO DI NYQUIST:

(Per $F(s) = 1 + L(s) = \frac{\varphi_{CL}}{\varphi_{OL}}$ -> X -> POLI IN OL (RADICI DI φ_{OL}, POLI DI $F(s)$)
O -> ZERI IN OL (RADICI DI φ_{CL}, ZERI DI $F(s)$))

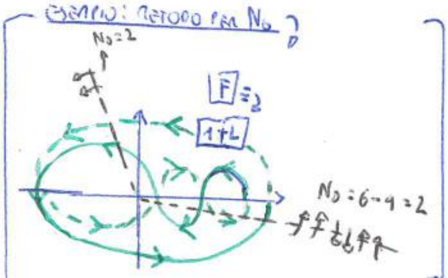
($R \to \infty$)



$$\left(\begin{array}{l} n_z^i = n_z^{Re>\emptyset} = P_{CL}^+ \\ n_p^i = n_p^{Re>\emptyset} = P_{OL}^+ \end{array}\right) \Rightarrow N_o = P_{CL}^+ - P_{OL}^+$$

ROTAZ ATTORNO A ORIGINE DI $F(s) = 1 + L(s)$

[ESEMPIO: METODO PER N_o]



$\equiv$

$\left(L \triangleq L_\emptyset \cdot K_\emptyset \to L_\emptyset = \frac{L}{K_\emptyset}\right)$ ~> [ROTAZ. DI $L_\emptyset$ ATTORNO A $-1/K_\emptyset$] $\equiv$ [ROTAZ. ATTORNO A -1 DI $L(s)$] !

(PUNTO CRITICO) (PUNTO CRITICO)

[Se L passa per il punto critico -1
$(L_\emptyset)$ $(-1/K_\emptyset)$] ~> (HO SEMPLICE STABILITÀ) ->

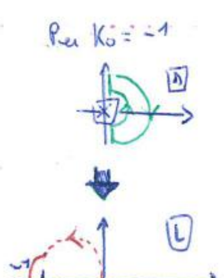
[CRITERIO DI NYQUIST:]

- $P_{CL}^+ = \emptyset \wedge \nexists$ poli OL su asse Im
  ⇓
  asint. stabilità
- $P_{CL}^+ = \emptyset \wedge \exists$ poli OL su asse Im
  ⇓
  sempl. stabilità ??
- $P_{CL}^+ > \emptyset$
  ⇓
  instabilità

HO ASSICURATO I POLI SULL'ASSE Im COME POLI NEL SEMIPIANO SX

-> (Per $K_0 = -1$ SYS SEMPL. STABILE)

Per $K_0 = -1$

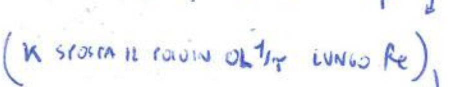


con il percorso di Nyquist modificato ho una Δfase di π intorno al PUNTO CRITICO che viene lasciato A DESTRA

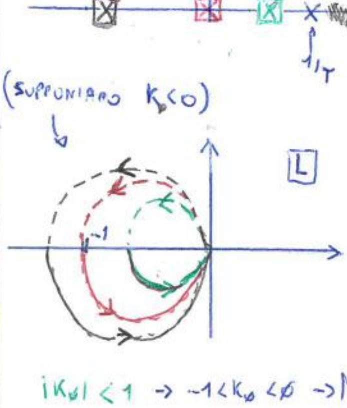
[$L(s) = \frac{K_0}{1 - sT} \to F(s) = \frac{1 - sT + K_\emptyset}{1 - sT}$

POLO IN CL = $(1+K) - sT = \emptyset \to s = \frac{1+K}{T}$

(K SPOSTA IL POLO IN OL $1/T$ LUNGO Re)



(SUPPONIAMO $K < 0$)



$|K_\emptyset| < 1 \to -1 < K_\emptyset < \emptyset \to N_o = \emptyset$ $P_{OL}^+ = 1$
↳ $P_{CL}^+ = \emptyset$ ASINT. STAB

$|K_0| > 1 \to K_0 < -1 \to N_o = -1$ $P_{OL}^+ = 1$
↳ $P_{CL}^+ = \emptyset$ ASINT. STAB

$|K_0| = 1 \to K_0 = -1$?]

(EFFETTO
SFASAMENTO
NULLO
E NULLO)

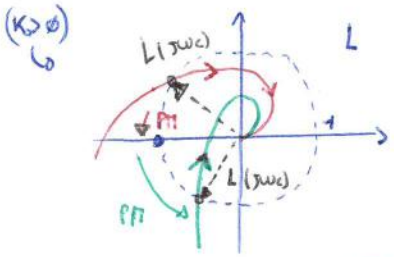
(ESEMPIO
CON
RETROAZIONE)

CRITERIO DI NYQUIST SEMPLIFICATO: MARGINE DI FASE

$$H_r:\begin{cases} p_{oi}^{+} = \emptyset \\ |L(j\omega)| \text{ monotona decrescente} \\ \exists!\,\omega_c \text{ t.c. } |L(j\omega)| = 1 \end{cases} \Rightarrow \left[MF \triangleq \begin{cases} \angle L(j\omega_c) + \pi & , K_0 > \emptyset \\ \angle L(j\omega_c) & , K_0 < \emptyset \end{cases} \right] \Rightarrow \begin{cases} MF > 0 \rightarrow [\text{STAB. ASINTOTICA IN CICLO CHIUSO}] \\ MF = \emptyset \rightarrow [\text{SEMPL. STABILE}] \\ MF < 0 \rightarrow [\text{INSTABILE}] \end{cases}$$

↑ PULSAZIONE DI TAGLIO

nei diagrammi di Nyquist:

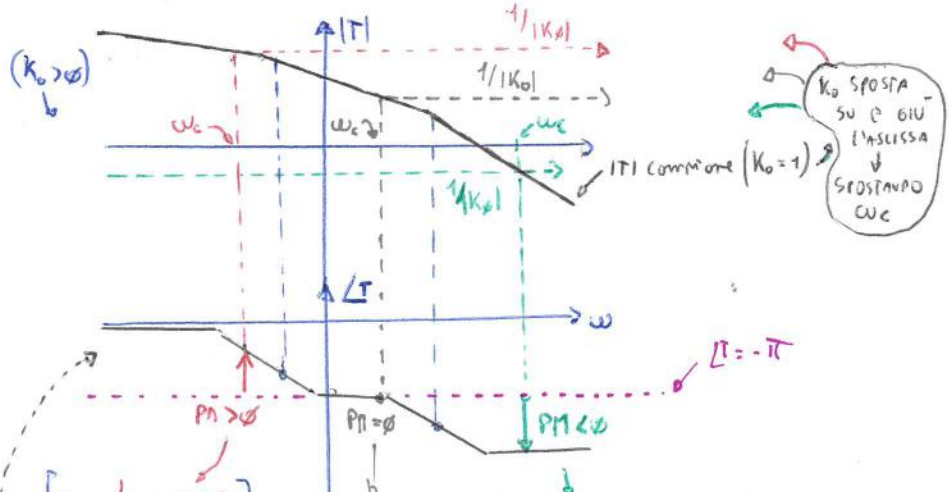


$[PM > 0 \rightarrow$ sys ASINT STABILE$]$

$[PM < 0 \rightarrow$ sys INSTABILE$]$

(NO MOTAX ATTORNO A -1)

nei diagrammi di Bode:



Per $\frac{1}{|K_\emptyset|}$ → ASINT STABILE

↓

PM a piccole $\Delta K_\emptyset$ ci sono quindi Δ di ω_c

↓

NON È BUONO PER LA ROBUSTEZZA

Per $\frac{1}{|K_0|}$ → SEMPL. STABILE

IL DIAGRAMMA POLARE PASSERÀ PER IL PUNTO CRITICO

Per $\frac{1}{|K_0|}$ → INSTABILE

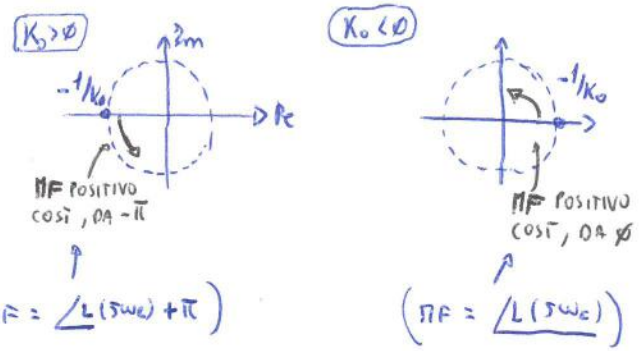
Per $K_\emptyset < \emptyset \Rightarrow -\pi$ ALLE FASI

↓

ATTENZIONE NEL DIAGRAMMA DI BODE !

b) [sarà ASINT. STAB per $\frac{1}{|K_\emptyset|} > \frac{1}{|K_0|}$ e sarà INSTABILE per $\frac{1}{|K_0|} < \frac{1}{|K_0|}$] ↙ [nella realtà il punto critico è uno solo, non c'è un "RANGE" di $\frac{1}{|K_\emptyset|}$]

Graficamente, con $L_0(j\omega)$:



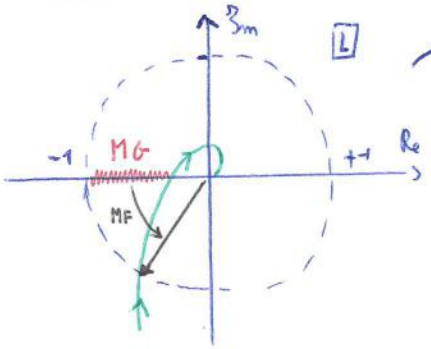
$\left(MF = \angle L(j\omega_c) + \pi\right)$ $\left(MF = \angle L(j\omega_c)\right)$

Il margine di fase è anche un'indicatore di ROBUSTEZZA: $(MF > \emptyset \uparrow) \Rightarrow (\text{Robustezza} \uparrow)$

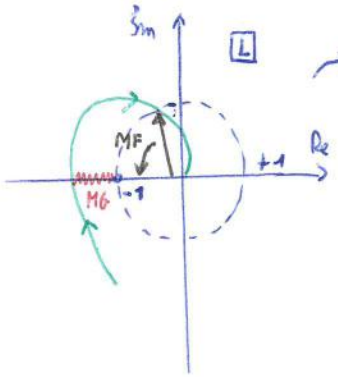
↳ $\left[MF \geq \pi/6\right]$ è una condizione di robustezza.

6. ROBUSTEZZA

↳ INDICATORE DI ROBUSTEZZA: MARGINE DI GUADAGNO



$MF > \emptyset$
↓
sys stabile
↓
$MG > \emptyset$ indica quanto si può far variare $K_\emptyset$ per rimanere in cond. stabilità
↳ ROBUSTEZZA



$MF < 0$
↓
sys instabile
↓
$MG < \emptyset$ indica quanto varia $K_\emptyset$ per tornare in condizioni di stabilità

$$MG \triangleq \frac{1}{|L(j\omega_\pi)|} = \frac{1}{|K_\emptyset|} \cdot \frac{1}{|L_0(j\omega_\pi)|}$$

$|K_\emptyset|$ può VARIARE

$|L_0(j\omega_\pi)|$ QUANTITÀ FISSA

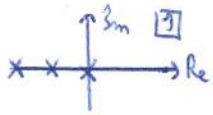
$$MG|_{dB} = -|L(j\omega_\pi)|_{dB}$$

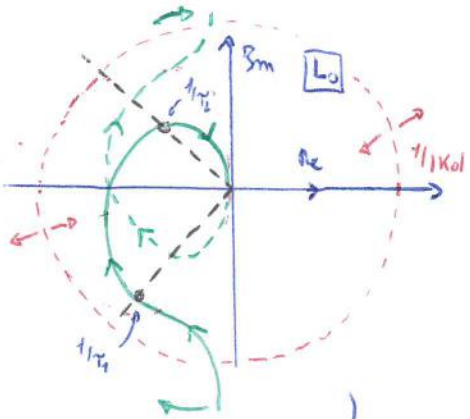
$\left[MG|_{dB} \gtrsim 6dB\right]$ → CONDIZIONE DI TOLLERANZA DI VARIAZIONI $K_\emptyset$ fino al 100%!

$(MG \gtrsim 2)$ ↑ CONDIZIONE DI ROBUSTEZZA

- esempio:

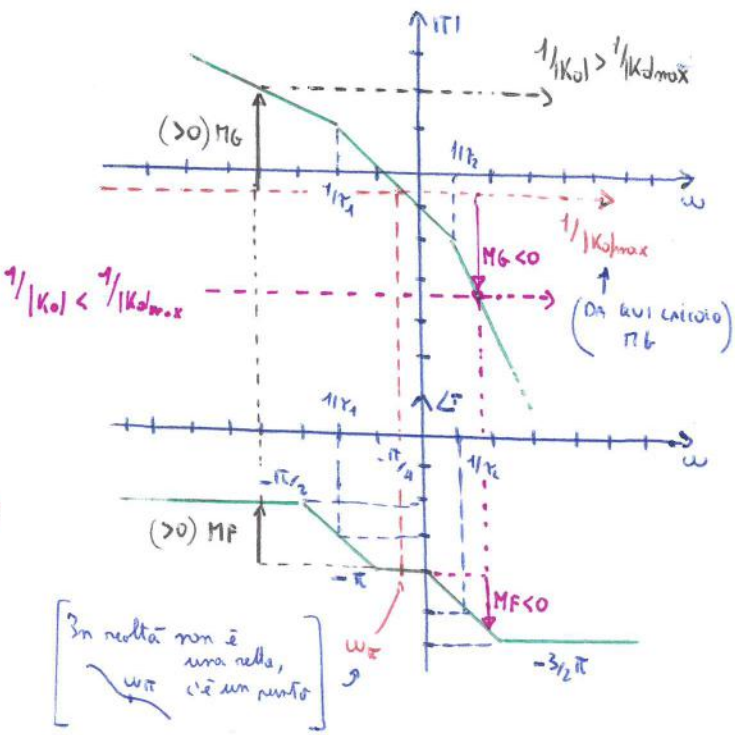
$$L(s) = K_0 \frac{1}{s(1+sT_1)(1+sT_2)}$$





$\left[\text{PER } 1/|K_{\emptyset max}| \to 0 \;\; L \to MF = \emptyset,\; MG = \emptyset\right]$

$$\begin{cases} -1/K_\emptyset < -|L(j\omega_\pi)| \to MF > \emptyset \\ 0 > -1/K_\emptyset > -|L(j\omega_\pi)| \to MF < \emptyset \\ -1/K_\emptyset > \emptyset \to MF < \emptyset \end{cases}$$



LUOGO DELLE RADICI

$$\frac{P_{CL}}{P_{OL}} = 1 + L(s) \rightarrow L(s) = K \cdot \frac{\prod_{i=1}^{m}(s - z_i)}{\prod_{j=1}^{n}(s - p_j)} \triangleq K \cdot T(s) \rightarrow \left(P_{CL} = \emptyset \Leftrightarrow 1 + KT(s) = \emptyset \right)$$

condiz.

→ POLI IN CICLO CHIUSO (reali in OL)

sposto i poli con K

$$1 + KT(s) = \emptyset \rightarrow \left[T(s) = -1/K \right]$$

condiz. affinché s sia polo CL

$$\begin{cases} |K| = \dfrac{\prod_{j=1}^{n}(s - p_j)}{\prod_{i=1}^{m}(s - z_i)} \\ \sum_{j=1}^{n} \angle(s - p_j) - \sum_{i=1}^{m} \angle(s - z_i) = \begin{cases} (2h+1)\pi & ; K > \emptyset \\ 2\pi h & ; K < \emptyset \end{cases} \end{cases}$$

EQ. COSTITUTIVE RL e CRL ($K>0$) ($K<0$)

NOTA: RL (la forma) dipende solo dalle POSIZIONI RELATIVE dei poli → ne traccia un'intera famiglia anche luci di corrispondenza

REGOLE DI COSTRUZIONE RL:

1. n rami, dove n è l'ORDINE DEL SYS
2. $|K| \rightarrow \emptyset$ POLI CL → POLI OL
3. $|K| \rightarrow \infty$ POLI CL → ZERI IN OL (m rami); ∞ ($n-m$ rami) → RAMI ASINTOTICI
4. DIREZIONI ASINTOTICHE:

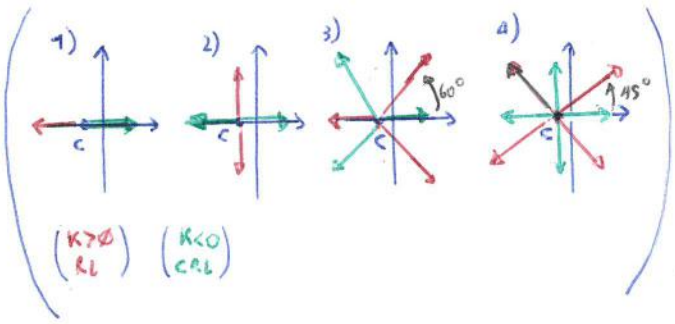
$$\theta_h = \begin{cases} (2h+1)\pi/n-m & ; (K>0) \\ 2h\pi/n-m & ; (K<0) \end{cases} \quad h \in [\emptyset, n-m)$$

θ_h / $n-m$	$\frac{2h+1}{n-m}\pi$ $(K>\emptyset)$	$\frac{2h}{n-m}\pi$ $(K<\emptyset)$
1 →	π	$\emptyset$
2 →	$\pi/2$ / $-\pi/2$	$\emptyset$ / π
3 →	$\pi/3$ / π / $5/3\pi = -\pi/3$	$\emptyset$ / $4/3\pi$ / $-2/3\pi$
4 →	$\pi/4$ / $3/4\pi$ / $-3/4\pi$ / $-\pi/4$	$\emptyset$ / $\pi/2$ / π / $-\pi/2$

5. CENTRO DEGLI ASINTOTI:

$$C = \frac{\sum_{j=1}^{n} p_j - \sum_{i=1}^{m} z_i}{n - m}$$

[POLI ⊕ / ZERI ⊖] !



6. SIMMETRIA RISPETTO A ASSE Re
(non sono ovvero poli NON complessi coniugati)

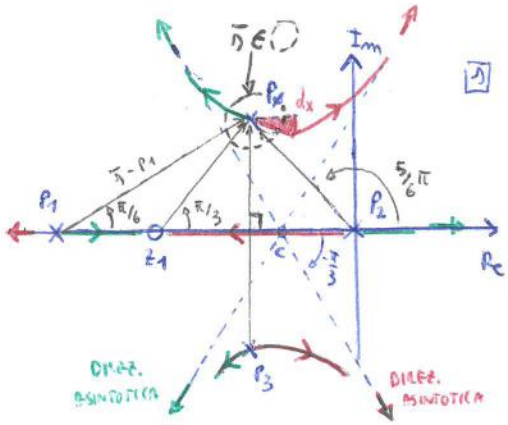
7. TRATTI DI RL/CRL su ASSE Re:
Sono tutti dei RL tutti i tratti che lasciano a destra sull'asse Re un n° DISPARI di poli/zeri REALI.

8. PUNTI DI DIRAMAZIONE:
Sono CANDIDATI a tali se denominatore i punti di s t.c. $\left[dT/ds = \emptyset \right] \Leftrightarrow \left[D'(s)N(s) - D(s)N'(s) = \emptyset \right]$
(non è detto che tutti $\in$ RL)

$$\left[\frac{dK}{ds} = \frac{d}{ds}\left(-\frac{1}{T(s)} \right) = \emptyset \right] \rightarrow \left[\left. \frac{ds}{dK} \right|_{s=\bar{s}} = \infty \leftarrow (\text{se } \bar{s} \text{ p.to di diramaz.}) \right]$$

(È UNA ASSEGNATA BANALITÀ DEL RL)

⑨ ANGOLI DI PARTENZA ED ARRIVO AI POLI ED AGLI ZERI:



Per $K>0$ (RL) → per RCL è l'angolo complementare

↓

vogliamo l'angolo di p_0:

$$\angle s-p_0 + \sum_{i=1}^{3} \angle s-p_i - \angle s-z_1 = (2h+1) \quad \Leftarrow (\text{Eq. del RL})$$

↓

CALCOLO RL per un $\bar{s} \in$ vicino a p_0 → (per questo $\angle \bar{s}-x \equiv \angle p_0-x \ \forall x$ posso calcolarmi)

↓

L'angolo $\angle \bar{s}-p_0$ è quello che mi interessa:

$$\angle \bar{s}-p_0 + \sum_{i=1}^{3} \angle \bar{s}-p_i - \angle \bar{s}-z_1 = (2h+1)\pi$$

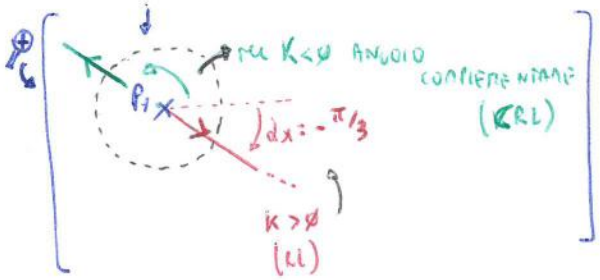
↓

chiamo $\angle \bar{s}-p_0 \triangleq d_x$ → IN GEN. $\Rightarrow \left[d_x = \sum_i \angle p_0-z_i - \sum_j \angle p_0-p_j + (2h+1)\pi \right]!$

(tutti tranne quello di d_x → p_0)

(NEGLI ESEMPI) $h=0$

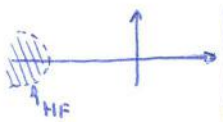
$$d_x = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{2} - \frac{5}{6}\pi + (2h+1)\pi = -\frac{\pi}{6}$$



per $K<0$ ANGOLO COMPLEMENTARE (∉RL)

NOTA #1: [Per i SISTEMI CON RITARDI FISSI → non vale RL ↳ vale ovviamente ciò che segue (Nyquist e Bode)] → NOTA 4/12 ③

NOTA #2:



[∃ poli in alte freq. (HF) non teniamo conto di questi che il loro contributo di fase è trascurabile ↳ li trascuro]

↳ METODO DI ROUTH-HORWITZ:

$$P_n(s) = \sum_{n=0}^{N} p_n s^n$$

R-H	N dispari	N pari
s^N	Tutti i p_n dispari	Tutti i p_n pari
s^{N-1}	Tutti i p_n pari	Tutti i p_n dispari
s^{N-2}	COSTRUISCO I COEFF	COSTRUISCO I COEFF
↓	↓	↓
(...)	(...)	(...)

} → (ordinati da n maggiore fino a 1)

VADO A 2 IN 2 → VEDI ESEMPIO

Supponendo che i termini della prima colonna siano $\neq 0$ ↯

[# radici $Re>0$ di $P_n(s)$ = # cambi di segno nella prima colonna]

COME COSTRUISCO:

$$\begin{bmatrix} a_3 & a_4 \\ a_1 & a_2 \end{bmatrix} \quad x = -\det \begin{bmatrix} a_3 & a_4 \\ a_1 & a_2 \end{bmatrix} \Big/ a_1$$

CAMBIATO DI SEGNO!

SE "BUCO" DEI PUNTI "VUOTI" CI METTO UNO 0 QUANDO FACCIO IL det

Es: $P_n(s) = p_4 s^4 + p_3 s^3 + p_2 s^2 + p_1 s + p_0$

RH	
s^4	[SEMPRE QUESTO E FACCIO AD OGNI PASSO −2] p_4 p_2 p_0
s^3	p_3 p_1
s^2	a_2 a_0
s^1	b_1
s^0	c_0

(a, b, c da calcolare)

ROUTH – HORWITZ: TRATTARE GLI "ZERO"

esempio: $P_{CL}(\eta) = \eta^3 + 2\eta^2 + \eta + 2$

R-H		
η^3	1	1
η^2	2	2
η^1	~~$\emptyset$~~	ε
η^0	+2	

← (il $\det\begin{vmatrix}1&1\\2&2\end{vmatrix}/2$ viene $\emptyset$ ma si mette una ε ▽)

← $\left(\frac{\det\begin{vmatrix}2&2\\\varepsilon&\emptyset\end{vmatrix}}{\varepsilon} = +\frac{2\varepsilon}{\varepsilon}\right)$

↓

$\emptyset(\varepsilon)$ indica la presenza di una radice $\Im m \neq \emptyset$

↳ $\emptyset$ variazioni: 3 radici $Re \leq \emptyset$

↓ 2 hanno complesse coniugate ▽

↳ 1 riga tutta di zeri (η^1)

↓

(NETTO INSIEME: 1 polo $Re < \emptyset$ $\Im m = \emptyset$ e due compl. coniugati $Re < \emptyset$)

esempio: $P_{CL} = \eta^5 + 2\eta^4 + 24\eta^3 + 48\eta^2 + 25\eta + 50$

R-H			
η^5	1	24	25
η^4	2	48	50
η^3	$\emptyset$	$\emptyset$	
η^2	3	96	
η^1	8	50	
η^0	24		
	50		

(RIGA INTERA DI ZERI ▽ ↳ INDICA UNA SIMMETRIA ▽ ↳ può essere rispetto a: – one Re (→ radici compl. coniugate) – one $\Im m$)

(PRENDO LA RIGA SOPRA: $P_A(\eta) = 2\eta^4 + 48\eta^2 + 50$; $\frac{dP_A}{d\eta} = 8\eta^3 + 96$; LE INSERISCO SOTTO (POLINOMIO AUSILIARIO); $\left(-\frac{(96\cdot 2 - 48\cdot 8)}{8} = 24\right)$)

↳ $\emptyset$ variazioni → 5 radici $Re \leq \emptyset$

↳ una $\emptyset$ in I colonna → 1 radice $\Im m = \emptyset$

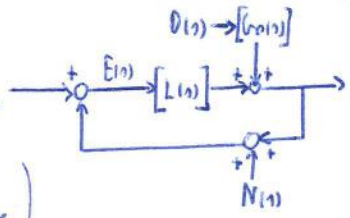
↳ una riga di $\emptyset$ → simmetria Re/$\Im m$

↓

(NETTO INSIEME: 1 tra poli $Re < \emptyset$ $\Im m = \emptyset$ e due poli compl. coniugati $Re \ll \emptyset$)

7. PRECISIONE

Abbiamo visto (PAR 2, p. ①) che:



$$Y(\eta) = P(\eta)Y_R(\eta) + S(\eta)D_D(\eta)D(\eta) - P(\eta)N(\eta)$$

(Supponiamo sys ASINT. STABILE ↳ analizziamo solo la risp. a regime.)

STUDIO PRECISIONE ⇒ Studio $S(\eta)$

↳ es: [con $Y_R(t) = \text{sen}(\omega_0 t) \Rightarrow e_{REGIME}(t) = |S(j\omega_0)|\,\text{sen}(\omega_0 t + \angle S(j\omega_0))$ ↳ deve essere piccolo] (LA FASE NON INFLUISCE) ⇒ $|e_{REGIME}(t)| \leq |S(j\omega_0)|$ (VALE SOLO PER SYS ASINT. STAB.) (PER INGRESSI SINUSOIDALI)

$[P(\eta) + S(\eta) = 1]$ CONDIZ. STRUTTURALE

$S[S(\eta)] = \emptyset \Rightarrow \exists \bar{\omega}$ t.c. $\forall \omega > \bar{\omega}\ |S(j\omega)| = 1$

↳ "presto o tardi arriva a 1" → non posso avere PRECISIONE su intervalli di frequenze relativamente alti!

[BANDA PASSANTE DEL SYS RETROAZ. $\emptyset \leq \omega \leq \omega_0$] $\triangleq$ [Insieme delle ω t.c. $|P(j\omega)| \approx 1$ ↳ $|S(j\omega)| \approx \emptyset$]

$$E(\eta) = Y_R(\eta) - Y(\eta) = (1 - P(\eta))Y_R(\eta) - S(\eta)D(\eta) + P(\eta)N(\eta) = S(\eta)Y_R(\eta)$$

(TRASCURO) → ($S(\eta)$ piccola ⇒ $E(\eta)$ piccolo)

NOTA: $e(t) = e_L(t) + e_{TRANS}(t) + e_{REGIME}(t)$

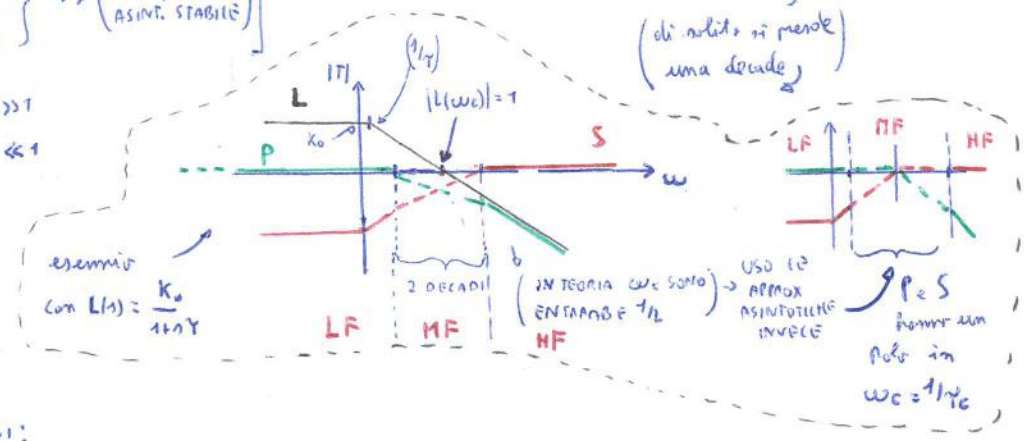
- $e_L(t)$: R. LIBERA — DIPENDE DA C. INIZIALI E POLI
- $e_{TRANS}(t)$: R. TRANSIT. — DIPENDE DAI POLI DI $S(s)$ DEL SISTEMA

$\rightarrow \phi$ (se SYS ASINT. STABILE)

$e_{REGIME}(t) \Leftrightarrow |S(j\omega)| = \frac{1}{1+|L(j\omega)|} = \begin{cases} 1/|L(j\omega)| & |L| \gg 1 \\ 1 & |L| \ll 1 \end{cases}$ (APPROX. ASINTOTICA)

(di solito si prende una decade)

Perciò: $|P(j\omega)| = \begin{cases} 1 & , |L| \gg 1 \\ |L(j\omega)| & , |L| \ll 1 \end{cases}$ (APPROX. ASINTOTICA)



TEORIA DELL'ERRORE PER SEGNALI POLINOMIALI NOTEVOLI:

[SEGNALE DI TIPO "i" $\triangleq$ LA SUA TRASF. DI LAPLACE FUNZ. DI TRASF. CONTIENE i POLI IN $s = \phi$ SISTEMA]

GUADAGNO

- STATICO: $K_S \triangleq \lim_{s\to\phi} L(s) = \begin{cases} K_0 \leftrightarrow \text{SYS TIPO } \phi \\ \infty \leftrightarrow \text{SYS TIPO } i \geq 1 \end{cases}$
- DI VELOCITÀ: $K_V \triangleq \lim_{s\to 0} s\,L(s) = \begin{cases} \phi \leftrightarrow \text{SYS TIPO } \phi \\ K_0 \leftrightarrow \text{SYS TIPO } 1 \\ \infty \leftrightarrow \text{SYS TIPO } i \geq 2 \end{cases}$
- DI ACCELERAZIONE: $K_A \triangleq \lim_{s\to\phi} s^2 L(s) = \begin{cases} \phi \leftrightarrow \text{SYS TIPO } \phi,1 \\ K_\phi \leftrightarrow \text{SYS TIPO } 2 \\ \infty \leftrightarrow \text{SYS TIPO } i \geq 3 \end{cases}$

	K_S	K_V	K_A
ϕ	K_0	ϕ	ϕ
1	∞	K_ϕ	ϕ
2	∞	∞	K_ϕ

$\sqrt{\ }$ 0

SEGNALE DI TIPO 1: GRADINO

$e_\infty^{STEP} = \lim_{s\to\phi} s \cdot E^{STEP}(s) = \lim_{s\to\phi} s \cdot S(s) \cdot Y_R(s) = \lim_{s\to\phi} s\,S(s)\frac{1}{s} = \lim_{s\to\phi} \not{s} \cdot \frac{1}{1+L(s)} \cdot \frac{1}{\not{s}} = \frac{1}{1+K_0} = \begin{cases} \frac{1}{1+K_0} \leftrightarrow \text{SYS TIPO } \phi \\ \phi \leftrightarrow \text{SYS TIPO } i \geq 1 \end{cases}$

($Y_R(s) = 1/s$)

limite $\exists \leftrightarrow E^{STEP}$ ASINT. STAB [th. val finale]

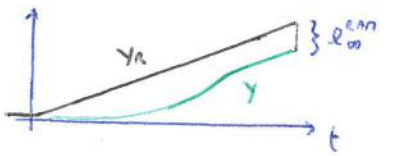
ERRORE STATICO

SYS ASTATICO $\leftrightarrow e_\infty^{STEP} = \phi \leftrightarrow$ TIPO ≥ 1 (in essi K_0 NON entra in gioco, in questo caso, per garantire la medesima! $\rightarrow$ è meglio)

SEGNALE DI TIPO 2: RAMPA

$e_\infty^{RAM} = \lim_{s\to\phi} s \cdot E^{RAM}(s) = \lim_{s\to 0} s \cdot S(s) \cdot \frac{1}{s^2} = \lim_{s\to 0} \frac{1}{1+s\,L(s)} = \frac{1}{K_V} = \begin{cases} \infty \leftrightarrow \text{SYS TIPO } \phi \\ 1/K_\phi \leftrightarrow \text{SYS TIPO } 1 \\ \phi \leftrightarrow \text{SYS TIPO } i \geq 2 \end{cases}$

Th. VAL. FINALE NON ALLUSO (RAMPA NON ASINT. STABILE) $\Rightarrow$ [$\lim \exists$ finito solo se $y \in y_R$ hanno la stessa pendenza]



SEGNALE DI TIPO 3: PARABOLA

$e_\infty^{PAR} = \lim_{s\to\phi} s \cdot E^{PAR}(s) = \lim_{s\to\phi} s \cdot S(s) \cdot \frac{1}{s^3} = \lim_{s\to\phi} \frac{1}{s^2 + s^2 L(s)} = 1/K_A = \begin{cases} \infty \leftrightarrow \text{SYS TIPO } \phi,1 \\ 1/K_0 \leftrightarrow \text{SYS TIPO } 2 \\ \phi \leftrightarrow \text{SYS TIPO } i \geq 3 \end{cases}$

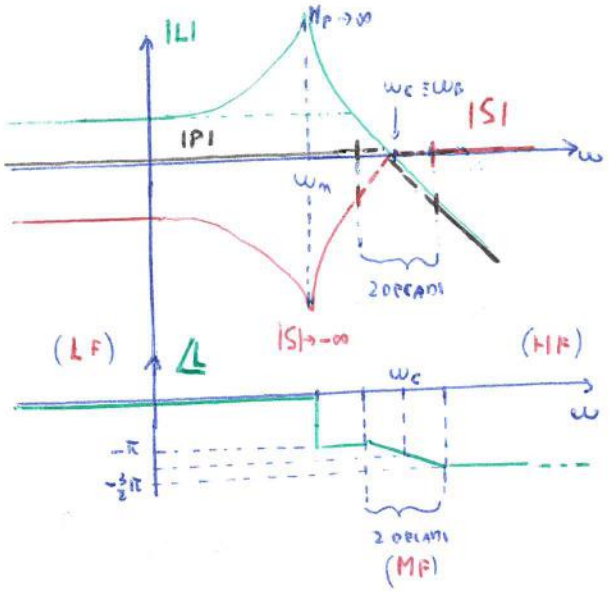
$\exists \lim ?(\dots)$

SEGNALI \ SISTEMI	TIPO ϕ	1	2	3	
1	$1/(1+K_0)$	ϕ	...		
2	∞	$1/K_0$	ϕ	...	
3	∞	∞	$1/K_0$	ϕ	...

Non si può avere errore $=0$ $\forall \omega$ $\rightarrow$ solo per certe ω $\left[\rightarrow$ CONDIZIONE ARMONICA: $|L_{aperto}(j\omega)| \leq |S(j\omega)|\right]$

↳ errore nullo solo alle FREQ. DISCRETE t.c. $|S(j\omega)| = 0$, perciò in determinati INTERVALLI DI FREQ.

$\left[|S(j\omega)| = 0 \Leftrightarrow |L(j\omega_\phi)| = \infty\right] \rightarrow$ [PICCO DI RISONANZA] $\rightarrow$ [POLI COMPL. CONJUGATI IN ω_ϕ IN OL] $\rightarrow$ ma si può $-\pi$ di fase $\rightarrow$ ridurre instabilità $\rightarrow$ [VEDI I COMPENSATORI]



[CONTROREAZIONE:
$\omega_B \uparrow \Rightarrow$ PRECISIONE $\uparrow$
ma
$\omega_B \uparrow \Rightarrow$ rende più RUMORE !!
↳ $\omega_B \downarrow \Rightarrow$ NOISE $\downarrow$]

(HF dalla zona in cui $|P|$ diventa $< 1/10$)

↳ USO DEI COMPENSATORI:

Servono a tirare su le fasi $\begin{cases} \text{POLO DX} \rightarrow \underline{\text{NO}} \\ \text{ZERO SX} \rightarrow \underline{\text{SI}} \end{cases}$ $\rightarrow$ zero a fase minima che piazzo in corrispondenza delle frequenze che "mi danno fastidio"

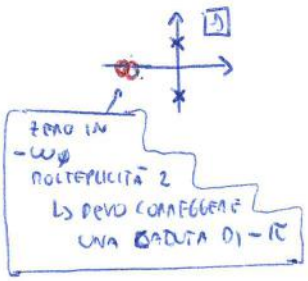
$R(\lambda) = \dfrac{(\lambda + \omega_\phi)^2}{\lambda^2 + \omega_\phi^2}$

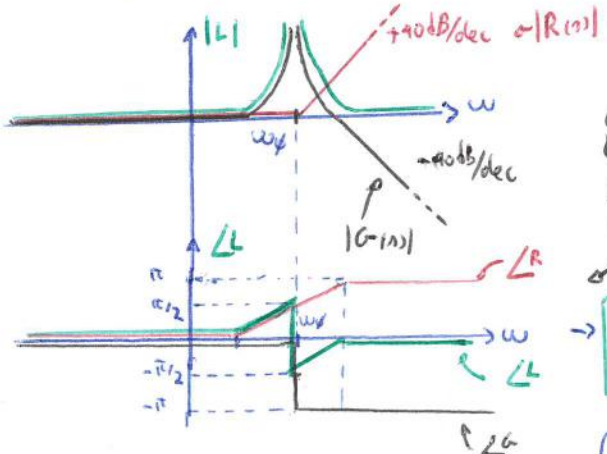
[per la fisica realizzabilità metterò doi poli fittizi in LF]

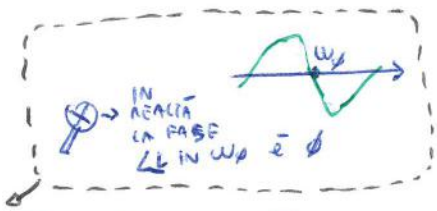
↓

NON FARÀ ANTIRISONANTI CHE CANCELLINO I POLI RISONANTI !! $\rightarrow$ IL PICCO DI $|L|$ LO VOGLIAMO MANTENERE

es: $\left[\rightarrow \left[(\lambda + \omega_0)^2\right] \rightarrow \left[G(\lambda) = \frac{1}{\lambda^2 + \omega_\phi^2}\right] \rightarrow\right] \Rightarrow \left(L(\lambda) = \dfrac{(\lambda + \omega_\phi)^2}{\lambda^2 + \omega_\phi^2}\right)$ $\leftarrow$ [è un FILTRO DI NOTCH]







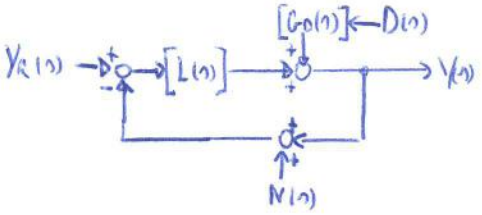
$\rightarrow$ [adesso ho un MF adeguato !!]

↓

(CONDIZ. ROBUSTEZZA $MF \geq \pi/6$)

[NOTA: Per stimare ξ COEFF. DI SMORZAMENTO in CL: $\xi \approx \dfrac{MF}{100}$]

8. REIEZIONE DISTURBI / RUMORE



la PRECISIONE studia $S(s)$

Studio l'effetto di $D(s)$ sull'uscita:

$$Y(s) = P(s)\,Y_R(s) + \underbrace{S(s)\,G_D(s)\,D(s)}_{Y_D} - \underbrace{P(s)\,N(s)}_{Y_N}$$

Y_D: a regime lo vogliamo piccolo

Y_N: $P(s)$ rivela la banda rimane del SYS

[Per $G_D(s)$ (FUORI DALL'ANELLO!!!) i poli $Re \geq 0$ devono essere presenti in $L(s)$, così da creare delle semplificazioni strutturali!
↓
se no poli INSTABILI non controllabili!]

Prendiamo una componente armonica del disturbo:

$$d(t) = d_\phi \sin(\omega_\phi t) \overset{\mathcal{L}}{\Rightarrow} D(s) = \frac{\omega_\phi}{s^2+\omega_\phi^2}\, d_\phi$$

$$y_{D,REGIME}(t) = |S(j\omega_\phi) H_{GD}(j\omega_\phi)| \sin(\omega_\phi t + \varphi(\omega_\phi))$$

[SOLO SE ANELLO ASINT. STABILE!]

[$\varphi(\omega_\phi) = \angle S(j\omega_\phi) + \angle G_D(j\omega_\phi)$]

$$|y_{D,REGIME}(t)| \leq \underbrace{|S(j\omega_\phi)| \cdot |G_D(j\omega_\phi)|}_{!}$$

↓

[è un diagramma in frequenza che mi dice dove il disturbo è attenuato e dove no.] → G_D dipende dall'impianto
↳ Bisogna lavorare su $S(s)$!

(più il modulo è piccolo più Y_D è attenuato a regime)

DISTURBO EQUIVALENTE $:: D_{eq}(s) \triangleq D(s) \cdot G_D(s)$

è D_{eq}! È VALE SOLO SE IL SYS È ASINT. STABILE!

↳ REIEZIONE COMPLETA DI TIPO N SEGNALE:

GENERALIZZO: [REIEZIONE COMPLETA di $D_{eq}(s)$ di TIPO "i"] $\Leftrightarrow$ [$L(s)$ di TIPO "$j \geq i$" $(\forall i, j)$]

$D_{eq}(s)$ DI TIPO 1°

[$y_{D,\infty} = 0 \Leftrightarrow S(s)$ ha almeno uno ZERO in $s=0$ $\Leftrightarrow$ $L(s)$ è di TIPO $i \geq 1$]

$S(s) = \frac{1}{1+L(s)}$

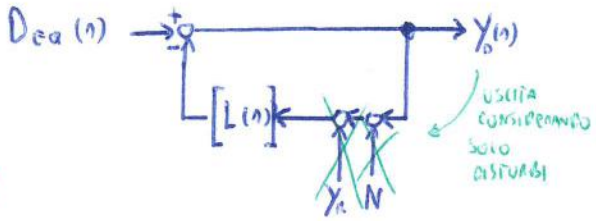
USCITA CONSIDERANDO SOLO I DISTURBI

$$y_{D,\infty} = \lim_{s\to 0} s\, Y_D(s) = \lim_{s\to 0} s \cdot \frac{1}{1+L(s)} D_{eq}(s)$$

[$L(s)$ è la f. di trasf. di TUTTI i BLOCCHI CHE CADONO PRIMA DEL PUNTO DI INIEZIONE DEL DISTURBO] → ($|L(s)| \uparrow \Rightarrow y_{D,\infty} \downarrow$)

USCITA CONSIDERANDO SOLO I DISTURBI

Infatti, se rimuoviamo i blocchi considerando solo i disturbi (Y_D) → ($Y_R = N = 0$) otteniamo:



NOTA!
TRADEOFF PRECISIONE - DISTURBI:
- $|P(s)|$ banda larga
↳ buona reiezione MA entrano un sacco di disturbi!!!

IDEM PER RUMORE:

Per RUMORE: $n(t) = d_\phi \sin(\omega_\phi t)$ $\quad y_{N,REGIME}(t) = |P(j\omega)| \sin(\omega_\phi t + \varphi(\omega_\phi))$

↳ $|y_{N,REGIME}(t)| \leq |P(j\omega_\phi)|$ ← QUESTA CONDIZIONE VALE SE $\omega > \omega_B$ (numero finito banda)

errore di regolazione: $e(t)$ a regime (e_∞): $e_\infty = \lim_{t\to\infty} e(t) = \lim_{s\to 0} s\,E(s)$ ← $\left(\frac{1}{1+L(s)}\,Y_R(s)\right)$

effetto del disturbo sull'uscita: $y_D(t)$ a regime $(y_{D,\infty})$: $y_{D,\infty} = \lim_{t\to\infty} y_D(t) = \lim_{s\to 0} s\,Y_D(s)$ ← $\left(\frac{1}{1+L(s)}\,D_{eq}(s)\right)$

uscita dell'unità in risposta a $y_R(t)$: $y(t)$ a regime (y_∞): $y_\infty = \lim_{t\to\infty} y(t) = \lim_{s\to 0} s\,Y(s)$

9. Analisi delle prestazioni in C.L. (per sys a fase minima)

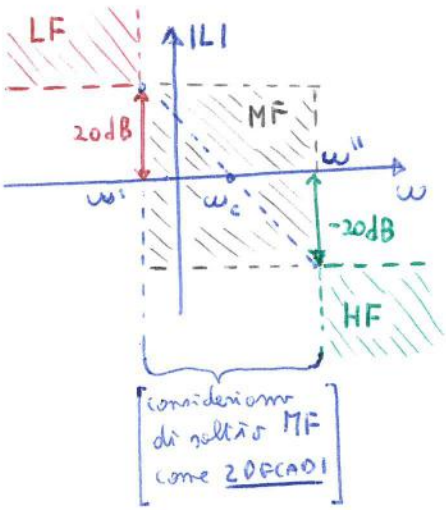
Basta che gli zeri a $\Re e$ NON NULLA ($\Re e > 0$) cadano fuori dalla BANDA, per essere non considerati

Se non ho poli in LF mi peggiorano il P.M (Phase Margin)

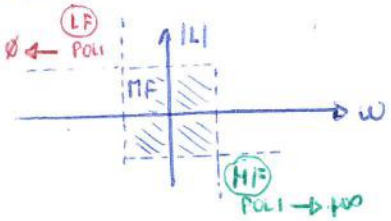
Se non ho specifiche più stringenti: approssimo così:

$$|S(j\omega)| = \begin{cases} 1/|L(j\omega)| & \text{per } |L(j\omega)| \gg 1 \xrightarrow{LF} |L(j\omega)| > 10 = 20dB \\ 1 & \text{per } |L(j\omega)| \ll 1 \xrightarrow{HF} |L(j\omega)| < 1/10 = -20dB \end{cases}$$

$$\xrightarrow{MF} -20dB < |L(j\omega)| < 20dB$$



Approssimo anche L:



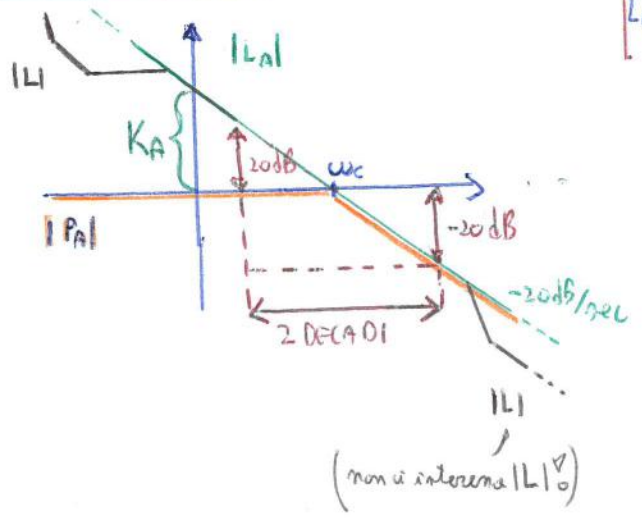
$\Rightarrow |L(s)|$ diventa ↓

$$L_A = \frac{1 + s\,\delta_\phi}{s^{\Omega}(1 + s\,\tau_\phi)}$$

← DI SOLITO UN SOLO POLO E/O UNO SOLO ZERO IN MF

Ω è la differenza fra zeri e poli in LF, e la PENDENZA con cui L_A ed L entrano in MF

- CASO TIPICO #1:



$$\left[L_A(s) = K_A \cdot \frac{1}{s}\right]; \qquad P_A(s) = \frac{L_A(s)}{1 + L_A(s)} = \frac{K_A/s}{1 + K_A/s} = \frac{1}{1 + s\,\tau_c}$$

$(= 1/K_A)$

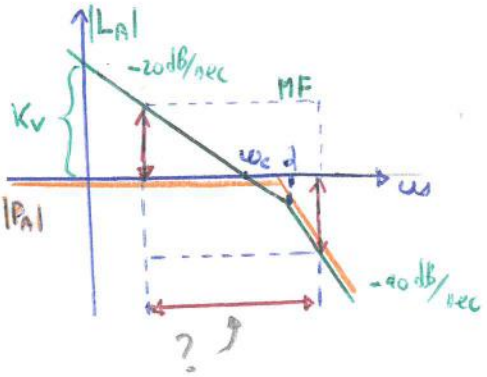
K_A è il GUADAGNO DI VELOCITÀ

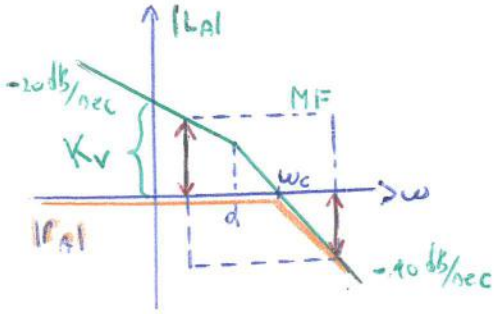
↳ se $\omega_c < 1 \Rightarrow K_{A\,dB} < 0 \Rightarrow K_A < 1$

$\Rightarrow K_A = \omega_c = 1/\tau_c$

$P_A(j\omega) \approx P(j\omega), \forall \omega_c$ MF

• CASO #2 :





$$L_A(s) = K_v \cdot \frac{1}{s(s+\alpha)}$$

- se $\alpha \to \omega_c$ allora PM si assottiglia
- se $\alpha = \omega_c$ allora $PM = \pi/4$
- se $\alpha =$ "$\omega_c - 1/2$ decade" $\to PM = \pi/6$ (limite di robustezza?)

("a sx di ω_c di mezza decade") $\to \alpha = \omega_c/5$

$$P_A(s) = \frac{L_A(s)}{1+L_A(s)} = \frac{K}{s^2+\alpha s+K} \triangleq \frac{\omega_n^2}{s^2+2\xi\omega_n s+\omega_n^2}$$

$\leftarrow K = \omega_n^2$

$1/\tau_\phi = 2\xi\omega_n = \alpha$

$$\to \left[L_A(s) = \frac{\omega_n^2}{s(s+2\xi\omega_n)}\right]$$

ω_c	$1/\tau_\phi = \alpha$	ξ	ω_n
K_v ①	$4\omega_c$ ③	1	$2\omega_c = 2K_v$
K_v	$2\omega_c$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{2}\omega_c = \sqrt{2}K_v$
K_v	ω_c	1/2	$\omega_c = K_v$
$< K_v$ ②	$0{,}64\omega_c$	0,4	$0{,}8\,K_v$

(SOTTO SMORZATI)

Se $\alpha > \omega_c$ allora $\xi > 1/2$ (vale per tutte le colonne della tabella)

Se $0{,}4 < \xi < 1$ il picco di risonanza è trascurabile

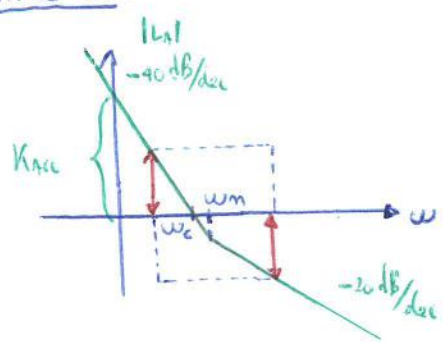
$\Rightarrow \omega_n = \frac{1}{2}\left[\log\frac{1}{\tau_\phi} + \log K_v\right]$ → è il punto medio tra $1/K_v$ e $1/T_\phi = \alpha$!

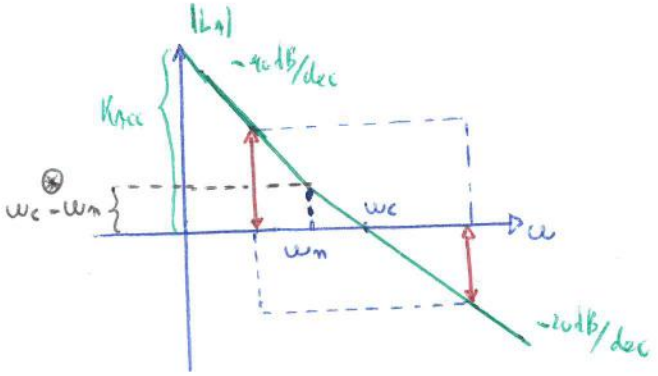
In queste condizioni (sottosmorzato ma non troppo) $\to \omega_n \approx K_v$

① → K_v (triangolo 45°, cateto ω_c) $\Rightarrow$ finché $\alpha > \omega_c$, allora $K_v = \omega_c$, poi non più ②

③ → Se $\alpha > 4\omega_c$ avremo in CL poli dominanti reali, Se $\alpha > 10\omega_c \to$ polo $(-\alpha)$ trascurato

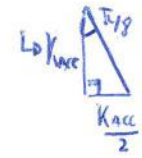
CASO TIPICO #3:



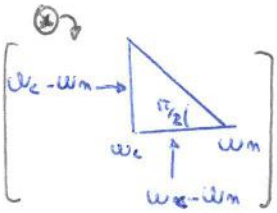


$$L_A = K\,\frac{s+z_\phi}{s^2} \qquad P_A = \frac{L_A}{L_A+1} = (\dots) = \frac{z_\phi K\left(1+{}^{1}/_{z_\phi}\right)}{s^2+Ks+z_\phi K} \qquad \left[K_{ACC} \triangleq z_\phi K \cong \omega_n^2\right] \text{ è il}$$

GUADAGNO DI ACCELERAZIONE



$\Rightarrow \omega_n = K_{ACC}/2 = \frac{z_\phi}{2} K$; Essendo $z_\phi = \frac{\omega_n^2}{K} = \frac{\omega_n}{2\xi} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} z_\phi \uparrow \Rightarrow \xi \downarrow \\ z_\phi \downarrow \Rightarrow \xi \uparrow \end{array}\right]$ → dello smorzamento cerchio quelli non vicini all'origine gli assi



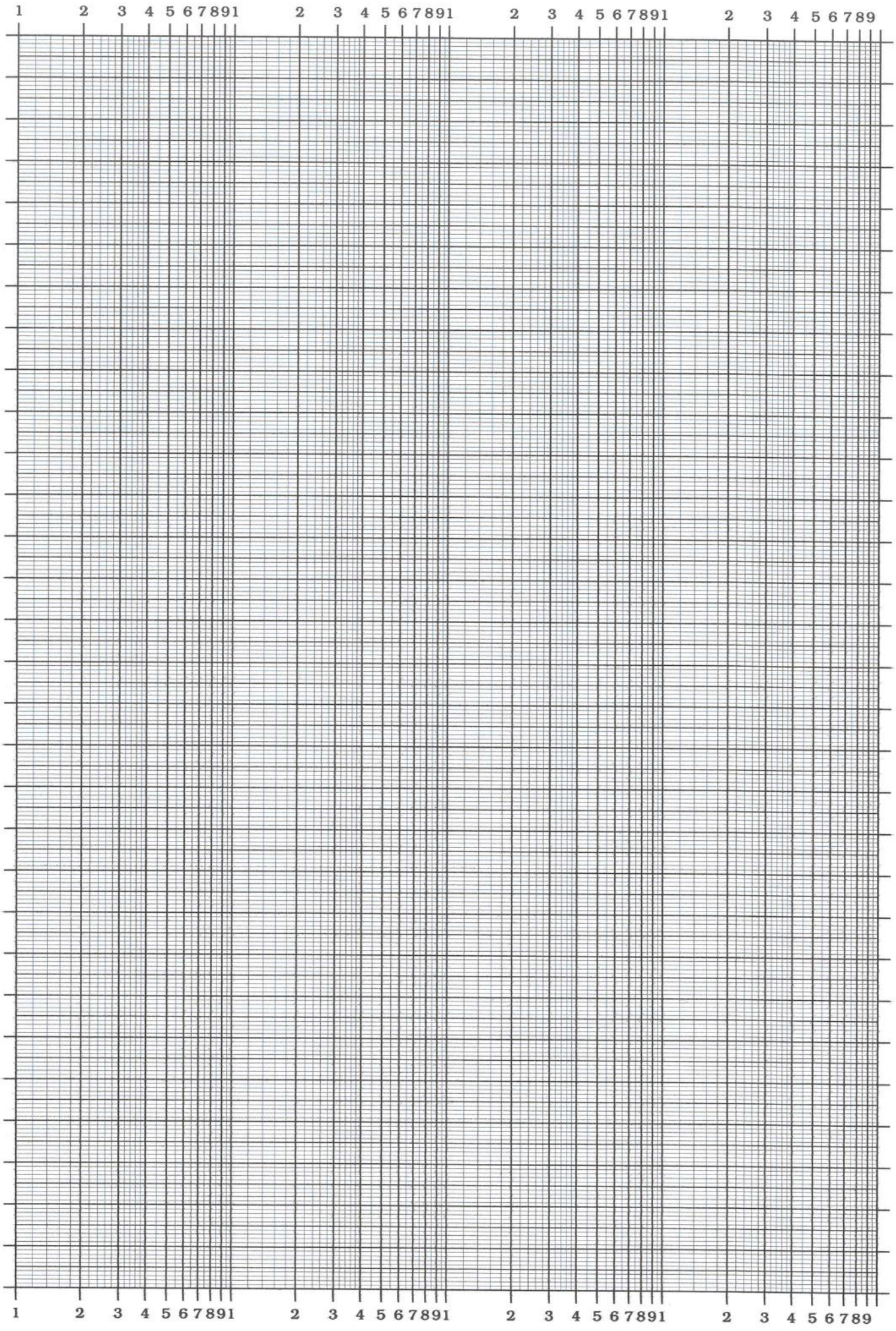
→ $\omega_c - \omega_n$ lo trovo "con il righello"

z_ϕ è $< \omega_n$ quando $\xi \geq 1/2$

$\Downarrow$

$\omega_n = z_\phi$ per $\xi = 1/2 \Rightarrow |M| = \pi/4$

ω_c	z_ϕ	ξ	ω_n	
$> \sqrt{K_{ACC}}$	$\omega_n/2$	1	$\sqrt{K_{ACC}}$	← SYS CRITICAMENTE SMORZATI
$> \sqrt{K_{ACC}}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}\omega_n$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{K_{ACC}}$	SYS RAGIONEVOLMENTE SOTTOSMORZATI
$\sqrt{K_{ACC}}$	ω_n	$1/2$	$\sqrt{K_{ACC}}$	
$\sqrt{K_{ACC}}$	$1{,}25\,\omega_n$	0,4	$\sqrt{K_{ACC}}$	


1 2 3 4 5 6 7 8 9 1 2 3 4 5 6 7 8 9 1 2 3 4 5 6 7 8 9 1 2 3 4 5 6 7 8 9
1 2 3 4 5 6 7 8 9 1 2 3 4 5 6 7 8 9 1 2 3 4 5 6 7 8 9 1 2 3 4 5 6 7 8 9

Scala Logaritmica

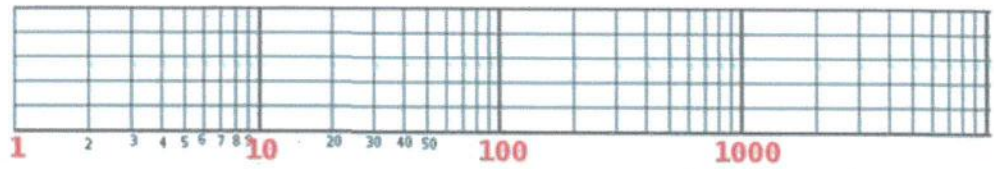


Diagramma del modulo

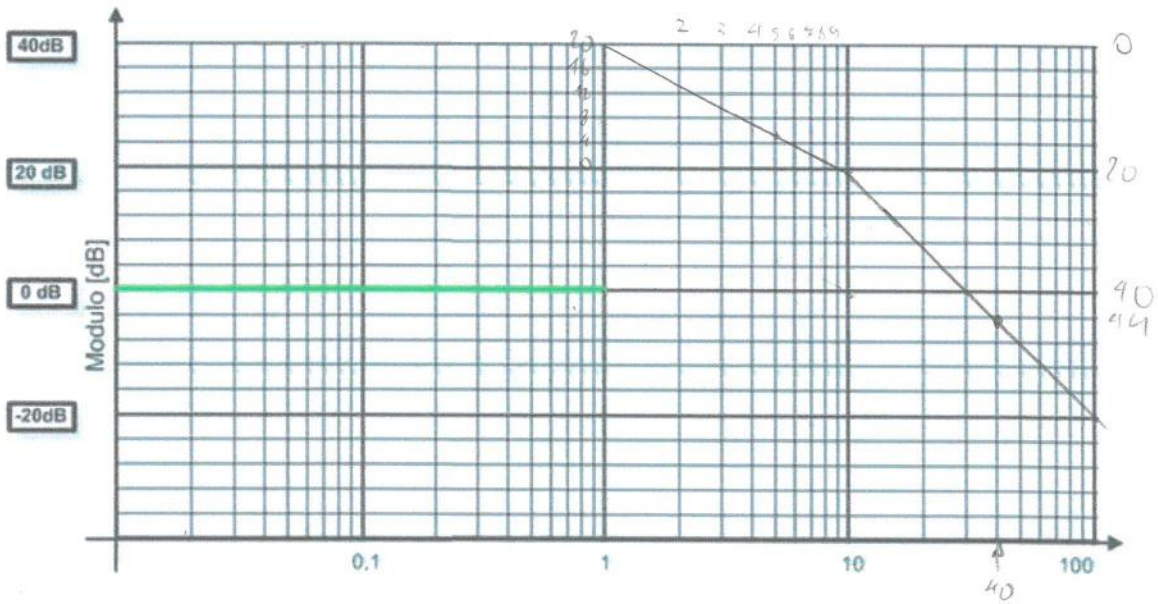
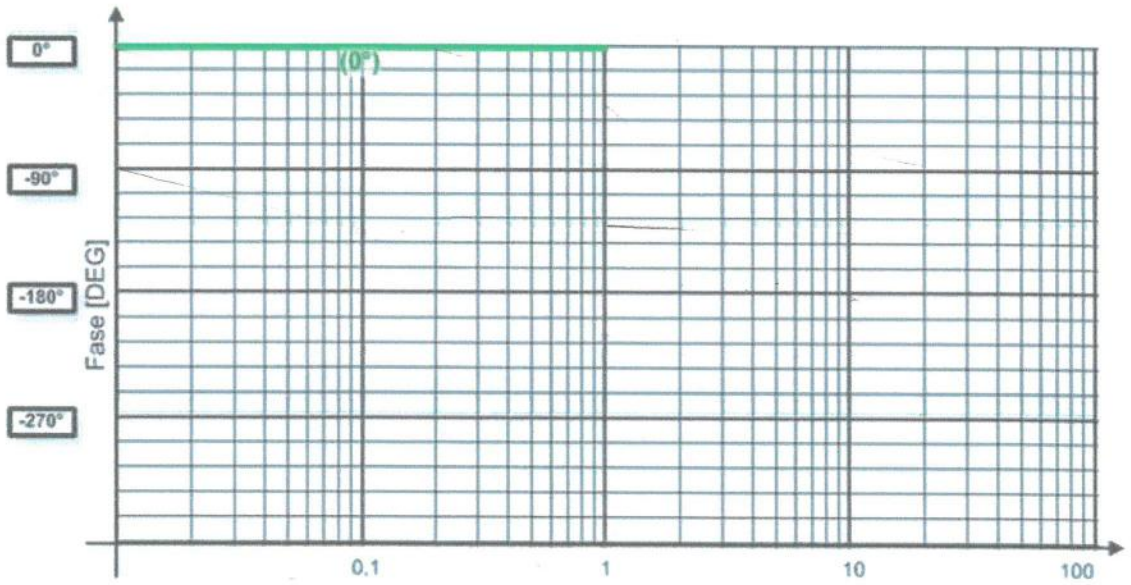


Diagramma della fase:



Metodo di Cramer

$A\underline{x} = B$

A: matrice; B: vettore colonna

$$x_i = \frac{\det(A_i)}{\det(A)}$$

[A_i è la matrice A a cui è stata sostituita la i-esima colonna con il vettore colonna B]